УДК 69.04
2.1.9. Строительная механика



О.Е. Копейкин
Вологодский государственный университет

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО И ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ СТАЛЬНЫХ БАЛОК

В данной статье представлено сравнительное исследование эффективности классического метода Монте-Карло и машинного обучения на основе гауссовских процессов для вероятностной оценки надежности стальных двутавровых балок. Сравнение выполняется по критериям вычислительной эффективности и точности расчета конструкции с множеством случайных вариаций исходных данных. Исследование позволяет выявить особенности применения каждого метода в контексте оценки надежности строительных конструкций.

Надежность, вероятностное проектирование, стальная балка, вероятность отказа, изгиб, предельное состояние, неопределенность.

В современном строительстве повышение надежности и безопасности конструкций при одновременной оптимизации материалоемкости остается одной из ключевых задач проектирования. Традиционные детерминированные методы расчета, основанные на использовании нормативных коэффициентов запаса, не всегда позволяют учесть особенности случайного характера нагрузок, геометрических параметров и механических характеристик материалов. В связи с этим все большее распространение получают вероятностные методы оценки надежности, которые обеспечивают более достоверное описание реального поведения конструкций в условиях неопределенности.

Среди многообразия вероятностных методов, применяемых в строительной механике, в данной статье основное внимание уделяется двум подходам: классическому методу Монте-Карло и методу гауссовских процессов. Выбор обусловлен тем, что первый является общепризнанным эталоном вероятностного анализа, а второй представляет собой перспективное направление машинного обучения с большим потенциалом для оптимизации вычислительных процессов. Развитие метода гауссовских процессов имеет глубокие корни в работах по байесовской статистике и решению обратных задач [1], что создало теоретические предпосылки для их применения в задачах вероятностного анализа надежности.

Классический метод Монте-Карло зарекомендовал себя как универсальный и надежный инструмент вероятностного анализа. Его принцип основан на многократном статистическом моделировании случайных параметров с последующим детерминированным расчетом отклика конструкции для каждого реализованного сценария. Несмотря на свою универсальность, простоту и высокую точность результатов, данный метод требует значительных вычислительных затрат при увеличении количества рассматриваемых случайных параметров и требуемой точности оценок. Это затрудняет его практическое применение в задачах, требующих оперативного анализа множества вариантов на стадиях проектирования. В этой связи представляют интерес методы, сочетающие точность Монте-Карло с вычислительной эффективностью, такие как динамические суррогатные модели на основе гауссовских процессов [2], которые адаптивно обновляются в процессе анализа и позволяют существенно сократить объем требуемых расчетов.

Альтернативным направлением развития вычислительных методов в строительной механике является применение технологий машинного обучения. Гауссовские процессы как один из методов байесовского машинного обучения предлагают эффективный подход к построению суррогатных моделей, способных аппроксимировать сложные функциональные зависимости между параметрами конструкции и ее откликом при ограниченном объеме обучающих данных. В исследовании [3] представлен подход, основанный на использовании суррогатных моделей гауссовских процессов для анализа надежности систем с множественными режимами отказов. Данный подход позволил сократить объем обучающих данных в 3–5 раз при одновременном повышении точности оценки вероятности отказа системы. Особенно эффективен данный подход для задач, подобных рассматриваемой в настоящей работе, где необходимо анализировать несколько коррелированных предельных состояний одновременно. Вероятностная природа гауссовских процессов позволяет задавать априорное распределение над пространством функций, связывающих входные и выходные параметры [4].

В данной работе проводится сравнительный анализ методов Монте-Карло и гауссовских процессов

для оценки вероятности безотказной работы стальной двутавровой балки 25Б2 по СТО АСЧМ 20-93 с вектором случайных параметров:

$$X = [h, b, t_w, t_f, q, R_y]^T,$$

где h, b, t_w, t_f – геометрические параметры сечения (высота, ширина полки, толщина стенки, толщина полки);

q – равномерно распределенная нагрузка;

R_y – расчетное сопротивление стали;

T– транспонирование вектора.

Балка рассматривается как изгибаемый элемент, работающий в условиях плоского изгиба в одной главной плоскости. Принята следующая расчетная схема (рис.).

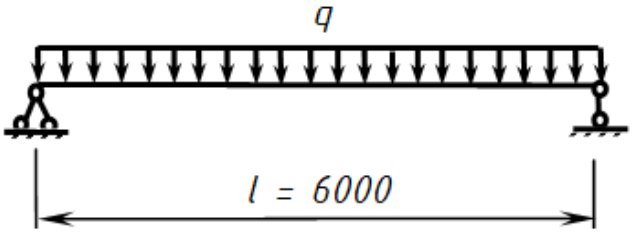


Рис. Расчетная схема

Информация о случайных величинах, необходимая для генерации исходных данных и вероятностного анализа, представлена в таблице 1.

Таблица 1

Параметры случайных величин

Случайная величина	**Распределение вероятностей**	**Параметры**
Равномерно-распределенная нагрузка	Равномерное	$P_1 \in$ [1000; 1500] кг
Прочность стали по пределу текучести	Нормальное	m_y = 250 МПа, S_y = 15 МПа, v_y = 0,05
Плотность стали	Равномерное	$P_1 \in$ [7700; 7900] кг/м^3
Геометрические параметры балки	Равномерное	В пределах допусков по СТО АСЧМ 20-93

Для каждой случайной величины сгенерируем 1 миллион значений, расчет выполним в программной среде MATLAB. Надежность оценивается по трем предельным состояниям, каждое из которых описывается своей функцией $g_i(X)$:

$$g_1(X) = R_y \cdot W_x(X) - M(X), \quad (1)$$

$$g_2(X) = 0{,}58 \cdot R_y - \tau(X), \quad (2)$$

$$g_3(X) = \delta_{lim} - \delta(X), \quad (3)$$

где W_x – момент сопротивления сечения; M, τ, δ – расчетные значения усилий и перемещений.

Оценка надежности методом Монте-Карло для данной задачи выражается через вероятность отказа P_f, которая определяется следующим образом:

$$P_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I[g(X_i) \le 0], \quad (4)$$

где N – общее количество сценариев; X_i – вектор случайных параметров в i-й реализации; $g(X_i)$ – функция предельного состояния; I[.] – индикаторная функция, равная 1 при выполнении условия отказа и 0 в противном случае.

Высокие вычислительные затраты метода Монте-Карло делают его малоэффективным для задач, где требуется быстрый сравнительный анализ множества проектных решений в условиях ограниченного времени. В этой связи представляет интерес использование методов машинного обучения, способных аппроксимировать зависимость между параметрами конструкции и ее откликом при существенно меньших вычислительных затратах.

Гауссовские процессы представляют собой метод байесовского машинного обучения, основанный на идее, что значения функции в различных точках связаны статистической зависимостью. Данный подход позволяет построить суррогатную модель, устанавливающую связь между параметрами конструкции и ее работой под нагрузкой. Основная идея метода состоит в том, что для любых двух и более конструкций со схожими параметрами значения напряжений, перемещений и других характеристик будут коррелированными.

Гауссовский процесс полностью определяется своей функцией среднего значения и ковариационной функцией [5] и записывается следующим образом:

$$f(\mathrm{x}) \sim GP\big(m(\mathrm{x}), k(\mathrm{x}, \mathrm{x}')\big), \quad (5)$$

где $m(\mathrm{x}) = \mathrm{E}[f(\mathrm{x})]$ – функция среднего значения;

$k(\mathrm{x}, \mathrm{x}') = \mathrm{E}[(f(\mathrm{x}) - m(\mathrm{x}))(f(\mathrm{x}') - m(\mathrm{x}'))]$ – ковариационная функция.

Степень корреляции определяется расстоянием между точками в пространстве параметров и задается с помощью ковариационной функции. В данном исследовании в качестве ковариационной функции используется квадратичная экспоненциальная функция (Radial Basis Function), которая в среде MATLAB реализуется заданием параметра *KernelFunction* как ‘*squaredexponential*‘ в функции *fitrgp*.

Из общего массива данных случайным образом отбираются 200 комбинаций параметров для построения и обучения суррогатных моделей. Для каждой комбинации выполняется полный детерминированный расчет, определяющий максимальный изгибающий момент, касательные напряжения и прогиб. Функция *fitrgp* в MATLAB не только задает тип ковариационной функции, но и автоматически настраивает ее гиперпараметры для наилучшего соответствия обучающим данным.

Таблица 2

Результаты анализа надежности балки

Критерий проверки	Вероятность безотказной работы, %		
	Монте-Карло	Гауссовские процессы	Разница
Изгибающий момент	99,9415	99,9426	0,0011
Касательные напряжения	99,9999	99,9999	0,0000
Прогиб	93,4493	93,4676	0,0196
Общая	93,3936	93,4138	0,0216

После обучения полученные модели используются для предсказания значений для всех оставшихся комбинаций параметров. Процесс предсказания реализуется через вычисление вектора ковариаций между новой точкой и всеми точками обучающей выборки с последующим решением системы линейных уравнений. В среде MATLAB данный процесс заключается в функции *predict*, которая предназначена для прогнозирования значений на основе обученных моделей. Важно отметить, что этот этап не требует выполнения трудоемких инженерных расчетов – вместо этого применяются быстрые матричные операции, что обеспечивает исключительную вычислительную эффективность.

На основании предсказанных значений осуществляется проверка выполнения условий предельных состояний для каждого сценария. Оцениваются вероятности отказа по изгибающему моменту, касательным напряжениям и прогибу, а также общая вероятность отказа конструкции.

После оценки вероятности отказа P_f по методу Монте-Карло и Гауссовских процессов вероятность безотказной работы P_s вычисляется как:

$$P_s = 1 - P_f. \quad (6)$$

В таблице 2 приведены результаты расчета вероятностей безотказной работы P_s. Общая вероятность рассчитывается как произведение вероятностей безотказной работы по трем критериям оценки.

Сравнение результатов двух методов позволяет оценить не только уровень надежности конструкции, но и точность суррогатного моделирования. Полученные данные свидетельствуют о высокой степени согласованности результатов, что подтверждает корректность применения суррогатных моделей для ускорения вероятностных расчетов. Что касается вычислительной эффективности, то при использовании аналитических формул для расчета оба метода показывают быстродействие. Время расчета для 1 миллиона сценариев методом Монте-Карло составило 5,7 секунды, а с использованием гауссовских процессов – 4,3 секунды. Однако метод гауссовских процессов обладает значительным потенциалом для ускорения расчетов в случаях, когда определение отклика конструкции требует значительных вычислительных затрат для одного сценария. Кроме того, структура метода, разделяющая этап обучения и этап предсказания, позволяет проводить многовариантный анализ при изменении параметров без переобучения модели, что особенно ценно на стадиях проектирования, требующих оперативной оценки множества альтернативных решений.

Литература

1. Tarantola, A. Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion / Tarantola, A., Valette, B. // Reviews of Geophysics. – 1982. – № 20 (2). – С. 159–170.

2. Guoshao, Su A Gaussian Process-based Dynamic Surrogate Model for complex Engineering Structural Reliability Analysis / Guoshao, Su, Lifeng, Peng, Lihua, Hu. // Structural Safety. – 2017. – № 68. – С. 97–109.

3. Barron J. Bichon Efficient Surrogate Models for Reliability Analysis of Systems with Multiple Failure Modes / Barron J. Bichon, John M. McFarland, Sankaran Mahadevan. // Reliability Engineering & System Safety. – 2011. – № 96 (10). – С. 1386–1395.

4. Agathe Girard. Approximate Methods for Propagation of Uncertainty with Gaussian Process Models : дис. Agathe Girard Philosophy наук / Agathe Girard. – Glasgow, 2004. – 167 p.

5. Carl Edward Rasmussen, Christopher K.I. Williams. Gaussian Processes for Machine Learning. – Massachusetts : Massachusetts Institute of Technology, 2006. – 266 p.

O.E. Kopeykin

Vologda State University

COMPARATIVE ANALYSIS OF MONTE CARLO METHOD AND GAUSSIAN PROCESSES IN PROBABILISTIC ASSESSMENT OF STEEL BEAMS RELIABILITY

This article presents a comparative study of the effectiveness of the classical Monte Carlo method and machine learning based on Gaussian processes for the probabilistic assessment of the reliability of steel I-beams. The comparison is performed based on the criteria of computational efficiency and accuracy of calculating a structure with many random variations of the initial data. The study allows us to identify the features of each method in the context of assessing the reliability of building structures.

Reliability, probabilistic design, steel beam, failure probability, bending, limit state, uncertainty.