МАШИНОСТРОЕНИЕ

Технология машиностроения

УДК 001.891.572

М.И. Вольников
Пензенский государственный технологический университет

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ И ПЛАСТИНЧАТЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУР ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Актуальность обусловлена недостаточной изученностью и разработанностью моделей ударных процессов в сложных гетероструктурах. Современные мехатронные системы, включающие в себя гибридные компоненты, состоящие из сложных гетерогенных структур, могут быть представлены в виде стержневых, пластинчатых и многослойных структур, работающие в условиях, обусловленных кинематическими, динамическими, вибрационными внешними воздействиями. Изучение и развитие гетроструктурных моделей динамики стержневых, пластинчатых и многослойных структур позволяют создавать надежные системы защиты сложных гетероструктур. Построению соответствующих математических моделей, позволяющих с достаточной степенью адекватности описывать процессы, происходящие в сложных гетероструктурах, посвящена данная статья.

Целью работы является изучение и развитие гетроструктурных моделей стержневых и пластинчатых структур, под действием силовых и импульсных нагрузок.

Дифференциальные уравнения, импульсные воздействия, гетероструктуры, пластинчатые, стержневые гетероструктуры.

Введение

Сложные гибридные гетероструктуры постоянно подвергаются внешним воздействиям, среди которых наиболее сильное влияние оказывают вибрационные и ударные воздействия.

Повышению надежности сложных гетероструктур от ударных и вибрационных перегрузок посвящено достаточно много статей различных авторов [1, 2, 3, 4], в том числе посредством многослойных заливок, обладающих высокими диссипативными свойствами и позволяющих переводить энергию ударных нагрузок или периодической силы в тепловое излучение [5].

В большинстве случаев гетероструктуры можно представить в виде стержневых, пластинчатых и многослойных структур. В простейшем случае это гетероструктуры с одной, а в общем случае со многими степенями свободы, для которых требуется составление систем линейных или нелинейных дифференциальных уравнений, последние из которых аналитических решений не имеют.

Ударные процессы в стержневых системах

Уравнение колебаний однородного стержня [6]:

$$\mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (a+ib)EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0. \qquad (1)$$

Решение (1) в комплексной форме представлено перемещением

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i(x) e^{-\frac{\gamma}{2}p_i(t)} e^{i(p_i t + \nu_i)}. \qquad (2)$$

Вещественная часть $z = ReZ$ удовлетворяет условиям

$$z(x,\ 0) = 0, \mu\dot{z}(x,\ 0) = -S_0(x),$$

где $p_i = \left(1+\frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2}\cdot p_i^0$ – i-я собственная частота стержня с внутренним трением, $p_i^0 = \lambda_i^2\sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}}$ – i-я собственная частота стержня без трения,

$$X_i(x) = A_i\left[\sin\lambda_i\left(\frac{x}{l}\right) + B_i \mathrm{sh}\lambda_i\left(\frac{x}{l}\right) + \right.$$
$$\left. + C_i\cos\lambda_i\left(\frac{x}{l}\right) + D_i\,\mathrm{ch}\lambda_i\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$ – балочная функция, удовлетворяющая уравнению

$$X_i^4 - \left(\frac{\lambda_i^4}{l^4}\right)X_i = 0, \qquad (3)$$

где l – длина стержня, λ_i – корни характеристического уравнения. Постоянные B_i, C_i, D_i определяются из условий закрепления стержня, A_i – определяется из условий нормировки балочной функции:

$$\frac{1}{l}\int_0^l X_i^2 dx = 1.$$

Вещественное решение для мгновенного импульса имеет вид

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_i(x) e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i t,$$

где $c_i = (1/\mu l p_i)\int_0^l s_0(x) X_i(x) dx$,

а его максимальное значение определяется формулой

$$|z_0| = \sum_{i=1}^{\infty}|c_i X_i(x)| e^{-\frac{\gamma}{4}\pi\frac{p_i}{p_1}}. \qquad (4)$$

Для импульса с конечным значением длительности импульса формула (4) применима в зависимости от вида импульсной нагрузки и зависит от коэффициента c_i:

– для кратковременного импульса

$$c_i = (\varepsilon_i/\mu l p_i)\int_0^l s(x) X_i(x) dx,$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_i\left(\frac{\tau}{T_1}\right) = \varepsilon_i(\mathrm{T})$; $\varepsilon_i(\mathrm{T}) = \frac{\chi(\mathrm{T})}{2\pi\int_0^{\mathrm{T}} f(t)dt}$, а некоторые значения χ и ε приведены в таблице 1;

– для кратковременного импульса постоянной интенсивности по всей длине стержня

$$c_i = (\varepsilon_i s/\mu l p_i)\int_0^l X_i(x)dx;$$

– для сосредоточенного импульса S, приложенного в точке x_0,

$$c_i = (\varepsilon_i S/\mu l p_i) X_i(x_0).$$

Нормированные балочные функции $X_i(x_0)$ по x для значений $i = 1, \ldots 5$ и различных условий закрепления краев даны в [7].

Ударные процессы в прямоугольных пластинчатых системах

Уравнение собственных колебаний пластин с учетом внутреннего трения для мгновенного импульса имеет вид

$$\mu\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + D(a+ib)\Delta\Delta Z = 0,\ \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}. \quad (5)$$

Решение задачи о прямоугольной пластине на двухпараметрическом основании ищется в форме двойного ряда по балочным функциям и предлагается в [7, 8]:

$$z(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_i(x,y) e^{-\frac{\gamma}{2}p_i t}\sin p_i\, t,), \quad (6)$$

где $F_i(x,y)$ – i-я форма собственных колебаний пластинки, равная

$$F_i(x,y) \approx X_r(x)Y_j(y),)$$

$$X_r(x) = A_r\left[\sin\lambda_r\left(\frac{x}{l}\right) + B_r \mathrm{sh}\lambda_r\left(\frac{x}{l}\right) + \right.$$

$$\left. + C_r\cos\lambda_r\left(\frac{x}{l}\right) + D_r\ \mathrm{ch}\lambda_r\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$Y_j(y) = A_j\left[\sin\lambda_j\left(\frac{y}{b}\right) + B_j \mathrm{sh}\lambda_j\left(\frac{y}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + C_j\cos\lambda_j\left(\frac{y}{b}\right) + D_j\ \mathrm{ch}\lambda_j\left(\frac{y}{b}\right)\right],$$

где l и b – размеры пластины вдоль осей x, y; λ_r, λ_j, B_j, C_j, D_j определяются из условий нормировки

$$\frac{1}{l}\int_0^l X_r^2 dx = 1, \frac{1}{b}\int_0^b Y_j^2 dy = 1,$$

где r, j – индексы балочных функций $X_r(x)$ и $Y_j(y)$, отвечающих стержням-полоскам, вырезанным из плиты вдоль осей X, Y и имеющих соответствующие условия закрепления.

Соответствие между номером i-й частоты колебаний плиты и индексами r, j устанавливаются по таблице 5.8 в [8].

Круговые частоты пластинок (7)

$$p_i = \frac{p_i^0}{\sqrt{1+\gamma^2/4}},\ p_i^0 = \frac{\lambda_i^2}{\sqrt{D/\mu l^4}}, \quad (7)$$

$$\lambda_i^2 = \sqrt{\lambda_r^4 + \lambda_{r,j}^2\eta^2 + \lambda_j^4\eta^4},\ \eta = \frac{l}{b}.$$

Значения λ_r^4 табулированы в [7] для различных условий закрепления пластинок.

Параметр c_i зависит от вида импульса и определяется:

– в общем случае

$$c_i = \frac{\varepsilon_i}{\mu l b p_i}\int_0^l\int_0^b s(x,y)X_r(x)Y_j(y)dxdy;$$

– для импульса, равномерно распределенного по площади пластинки ($s = const$),

$$c_i = \frac{\varepsilon_i s}{\mu l b p_i}\int_0^l X_r(x)dx\int_0^b Y_j(y)dy;$$

– для сосредоточенного импульса s в точке $(x_0,\ y_0)$ пластины

$$c_i = \frac{\varepsilon_i S}{\mu l b p_i} X_r(x_0)Y_j(y_0),$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\tau/T_i)$ могут быть взяты из таблиц 5.6, 5.7 [8].

Таблица 1

Некоторые значения χ и ε

T	Форма импульсов, $f(t)$							
	1		2		3		4	
	ε	χ	ε	χ	ε	χ	ε	χ
0	1		1		1		1	
0.5	0.637		0.755		0.761		0.785	
1	0.318		0.369		0.494		0.433	
1.4	0.227		0.253		0.379		0.277	
2	0.159		0.172		0.280		0.167	
3	0.106	2	0.112	1.053	0.195	1.839	0.104	1.200
5	0.064	2	0.066	1.032	0.121	1.90	0.056	1.111
10	0.032	2	0.032	1.016	0.062	1.95	0.026	1.053
20	0.016	2	0.016	1.008	0.031	1.975	0.013	1.025

Таблица 2

Соответствие между номером i-й гармоники колебательной частоты пластины и индексами r, j

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r	1	1	2	2	1	3	2	3	3	1	4	2	4	3	4	4
j	1	2	1	2	3	1	3	2	3	4	1	4	2	4	3	4

Верхнее значение максимума суммы затухающих гармоник:

$$|A_0| = \sum_{i=1}^{\infty}|A_i|e^{-\frac{\gamma}{4}\pi\frac{p_i}{p_1}}, A_i(z_0) = c_i X_r Y_j. \quad (8)$$

Частная модель многослойных гетероструктур

Модель многослойных гетероструктур может быть представлена пакетом текстолитовых плат, помещенных в корпус. В качестве частного случая рассмотрим N-слойную коробчатую конструкцию с абсолютно жесткими стенками и шарнирным опиранием пластин размера a по контуру.

Уравнения движения получаются из вариационного принципа возможных перемещений

$$\delta A = \delta A^e + \delta A^i + \delta A^u = 0, \quad (9)$$

где δA – виртуальная работа всех сил; δA^e– внешних, δA^i– внутренних и δA^u– сил инерции на возможных перемещениях.

Прогиб пластин W_i и возможное перемещение δW_i зависят только от одной координаты. В рабочей среде – заполнителе возникают лишь вертикальные перемещения, функции которых $U_i(x,y)$ линейно зависят от координаты y к плоскости и определяются функциями прогибов W_i и W_{i-1} контактирующих с ним пластин.

$$U_1 = W_1$$
$$\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$
$$U_{N+1} = \frac{W_N(1-y)}{H_{N+1}},$$

где H_1 – толщина слоя заполнителя между пластинами.

Виртуальная работа внутренних сил i-й пластины определяется в рамках теории упругих пластин Кирхгофа – Лява:

$$\delta A^i_{\text{пл}} = -\int_0^a M\delta x dx, \quad (11)$$

где M – изгибающий момент $M = \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}\chi$; χ – кривизна пластины $\chi = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$; h – толщина пластины.

Виртуальная работа внутренних сил i-го слоя заполнителя совершается сжимающими напряжениями σ_{yy} и напряжениями сдвига σ_{xy}:

$$\delta A^i_{\text{зап}} = -\int_0^a dx \int_0^{H_i} \left(\sigma_{yy}\delta\varepsilon + \sigma_{xy}\delta\gamma\right)dy,$$

где $\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial y}$– относительное удлинение вдоль оси y; $\gamma = \frac{\partial U}{\partial x}$ – сдвиг в плоскости xy.

Полная виртуальная работа внутренних сил системы:

$$\delta A^i = -\sum_{i=1}^{N}\int_0^a \frac{Eh^3}{12(1-\vartheta^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}dx - \sum_{i=1}^{N+1}\int_0^a dx\int_0^{N_i}\left(\sigma_{yy}\delta\varepsilon + \sigma_{xy}\delta\gamma\right)dy. \quad (12)$$

Виртуальная работа внешних сил под действием заданной ударной нагрузки F равна

$$\delta A^e = -\sum_{i=1}^{N}\int_0^a F\rho h\delta W_i dx - \sum_{i=1}^{N+1}\int_0^a\int_0^{N_i} F\rho_1\delta U_i dy\, dx. \quad (13)$$

Полная виртуальная работа сил инерция в пластиках и заполнителе:

$$\delta A^u = -\sum_{i=1}^{N}\int_0^a \rho h\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}\delta W_i dx - \sum_{i=1}^{N+1}\int_0^a dx\int_0^{N_i}\rho_1\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dy, \quad (14)$$

где ρ – плотность пластаны; ρ_1 – плотность заполнителя.

Кинематические краевые условия закрепления пластин

$$W_i(0) = W_i(a) = 0,\ i = 1,2,\dots,N. \quad (15)$$

Алгоритм решения

Вариационная задача (10), (15) решается методом Бубнова-Галеркина выбором координатных функций в синусоидальной форме

$$W_i(x,t) = z_i(t)\sin\frac{\pi x}{a}, i = 1,2,\dots,N.$$
$$\delta W_i = \delta z_i\sin\frac{\pi x}{a}, i = 1,2,\dots,N. \quad (16)$$

Вычисляются деформации и вариации деформаций, приравниваются к нулю коэффициенты при независимых вариациях δz_i и в итоге задача (10), (15) сводятся к системе N обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $z_i(t)$ [5].

$$\ddot{z}_1\frac{a}{2}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_1+H_2}{3}\right) + \ddot{z}_2\frac{a}{6}\rho_1 H_2 + z_1\frac{Eh^3\pi^4}{24(1-\vartheta^2)a^3} + \int_0^a dx\left[\int_0^{H_1}\left(\frac{\sigma_{yy}}{H_1}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(\frac{y}{H_1}\right)\right)dy + \int_0^{H_2}\left(-\frac{\sigma_{yy}}{H_2}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(1-\frac{y}{H_2}\right)\right)dy\right] + F\frac{2a}{\pi}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_1+H_2}{2}\right) = 0; \quad (17)$$

$$\ddot{z}_{i-1}\frac{a}{6}\rho_1 H_i + \ddot{z}_i\frac{a}{2}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_i+H_{i+1}}{3}\right) + \ddot{z}_{i+1}\frac{a}{6}\rho_1 H_{i+1} + z_i\frac{Eh^3\pi^4}{24(1-\vartheta^2)a^3} + \int_0^a dx\left[\int_0^{H_i}\left(\frac{\sigma_{yy}}{H_i}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(\frac{y}{H_i}\right)\right)dx + \int_0^{H_{i+1}}\left(-\frac{\sigma_{yy}}{H_{i+1}}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(1-\frac{y}{H_{i+1}}\right)\right)dy\right] + F\frac{2a}{\pi}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_i+H_{i+1}}{2}\right) = 0; \quad (18)$$

$$\ddot{z}_{N-1}\frac{a}{6}\rho_1 H_N + \ddot{z}_N\frac{a}{2}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_N+H_{N+1}}{3}\right) + z_N\frac{Eh^3\pi^4}{24(1-\vartheta^2)a^3} + \int_0^a dx\left[\int_0^{H_N}\left(\frac{\sigma_{yy}}{H_N}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(\frac{y}{H_N}\right)\right)dy + \int_0^{H_{N+1}}\left(-\frac{\sigma_{yy}}{H_{N+1}}\sin\frac{\pi x}{a} + \frac{\sigma_{xy}\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left(1-\frac{y}{H_{N+1}}\right)\right)dy\right] + F\frac{2a}{\pi}\left(\rho h + \rho_1\frac{H_N+H_{N+1}}{2}\right) = 0. \quad (19)$$

Вместе с нулевыми начальными условиями

$$z_i(0) = 0, \dot{z}_i(0) = 0, i = 1,2, \dots, N. \quad (20)$$

Задача (17) ... (20) решается численными методами, например Рунге-Кутте.

Разработанные модели могут найти широкое применение в технике и технологиях. Одним из возможных вариантов применения являются строительные балочные и стержневые конструкции, мачтовые сооружения.

Немаловажным является возможность моделировать поведение диссипативных систем с учетом трения (8).

Модели позволяют исследовать динамические процессы, происходящие под действием импульсных нагрузок.

Для описания процессов, происходящих под действием ударных нагрузок, привлекается аппарат численно-аналитического моделирования, который предполагает использование численных методов и вычислительной техники.

Заключение

Развита теория построения моделей гетероструктур специальной мехатроники. Предложены фундаментальные математические модели гетероструктур мехатроники. Построены модели гетероструктур при наличии воздействия в виде периодической и импульсной нагрузок. Представлены результаты моделирования гетероструктур под воздействием динамических нагрузок различных типов. Описаны общая модель многослойных гетероструктур и со множеством степеней свободы. Разработан алгоритм решения вариационной задачи, предложена методика ее решения.

Литература

1. Патент № 2666964 C1 Российская Федерация, МПК H05K 5/06. Способ защиты электронных блоков от инерционных ударных и вибрационных воздействий : № 2017139936 : заявл. 16.11.2017 : опубл. 13.09.2018 / Г. В. Петрунин, С. Н. Курков, Д. С. Курков [и др.] ; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет» (ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»).

2. Shein, A. I. Tape system for damping vibrations of mesh domes with a central mount for seismic impacts / A. I. Shein, A. V. Chumanov // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2021. – Vol. 95. – P. 100–107. – DOI 10.1007/978-3-030-54652-6_15.

3. Шеин, А. И. Конструктивные способы гашения колебаний зданий и сооружений / А. И. Шеин, А. В. Чуманов // Моделирование и механика консрукций. – 2017. – № 6. – С. 7.

4. The Concept of Vibration Protection and an Overview of the Global Market of Vibration Protection Materials / K. L. Domnina, Yu. R. Nikitin, A. V. Repko, N. A. Gumennikov // Intelligent Systems in Manufacturing. – 2022. – Vol. 20, No. 2. – P. 106–113. – DOI 10.22213/2410-9304-2022-2-106-113.

5. Литвинов, А. Н. Прикладные модели механики гетерогенных структур изделий приборостроения : монография / А. Н. Литвинов, М. А. Литвинов, В. В. Смогунов ; Федеральное агентство по образованию, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пензенский государственный университет». – Пенза : Издательство Пензенского государственного университета, 2009.

6. Бабажанов, Б. Б. Колебания трехслойного стержня под действием мгновенно-нарастающей нагрузки / Б. Б. Бабажанов // Вестник науки и образования. – 2020. – № 10-2(88). – С. 6–12. – DOI 10.24411/2312-8089-2020-11004.

7. Инструкция по расчету перекрытий на импульсные нагрузки. – Москва : Стройиздат, 1966. – 135 с.

8. Справочник проектировщика / под редакцией В. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – Москва : Стройиздат, 1984. – 304 с.

M.I. Volnikov

Penza State Technological University

DYNAMIC MODELS OF ROD AND PLATE HETEROSTRUCTURES UNDER INFLUENCE OF IMPULSIVE EFFECTS

The relevance of the article is due to the lack of knowledge and development of models of impact processes in complex heterostructures. Modern mechatronic systems incorporating hybrid components consisting of complex heterogenous structures can be presented as rod, plate and multilayer structures operating under conditions conditioned by cinematic, dynamic, vibrational externalities. The study and development of heterostructural models of dynamic rod, plate and multilayer structures allow to create reliable protection systems for complex heterostructures. This article is devoted to the construction of appropriate mathematical models that allow to describe processes occurring in complex heterostructures with a sufficient degree of adequacy.

The aim of the work is to study and develop heterostructural models of rod and plate structures, under the action of force and impulse loads.

Differential equations, pulsed effects, heterostructures, plate-shaped, rod-shaped heterostructures.