УДК 001.891.572

М.И. Вольников[1], Е.М. Вольников[2]
[1]Пензенский государственный технологический университет,
[2]Московский авиационный институт (МАИ)

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГЕТЕРОСТРУКТУР

Актуальность обусловлена недостаточной изученностью и разработанностью моделей динамики сложных гетероструктур. Современные мехатронные системы работают в экстремальных условиях, обусловленных кинематическими, динамическими, температурными, вибрационными и другими внешними факторами и подвергаются внешним воздействиям. Изучение фундаментальных основ и развитие гетероструктурных моделей динамики на модели со многими степенями свободы позволяют изучать поведение гетероструктур под действием механических и вибрационных сил. Для этого требуется построение соответствующих математических моделей, позволяющих с достаточной степенью адекватности описывать процессы, происходящие в сложных гетероструктурах.

Дифференциальные уравнения, гетероструктуры, мехатроника, ударные процессы.

Введение

Сложные гибридные гетероструктуры, постоянно подвергаются внешним воздействиям, среди которых наиболее сильное влияние оказывают вибрационные и ударные воздействия. Недостаточная изученность сложных гибридных гетероструктур и, как следствие, проблема разработки моделей защиты гетероструктур мехатроники для изучения поведения гетероструктур делает работу актуальной.

Для динамических перемещений могут быть использованы фундаментальные модели гетероструктур, позволяющие анализировать результаты воздействий ударных нагрузок на изделия мехатроники.

Методология

Для разработки защиты сложных гетероструктур в современных условиях необходимо использование математических моделей для проведения вычислительных экспериментов. Так, для оценки технологий виброударозащиты гетероструктур используются фундаментальные модели гетероструктур [1] без учета и с учетом внутреннего трения, позволяющие анализировать результаты воздействий нагрузок на различные изделия.

Для описания процессов, происходящих под действием ударных нагрузок, привлекается аппарат численно-аналитического моделирования [2, 3], который предполагает использование численных методов и вычислительной техники.

Результаты.
Фундаментальные модели для изучения динамики гетероструктур

При ударе груза массой m, движущегося горизонтально со скоростью v_0, по пружине с массой $m_s = 0$ процесс совместного движения груза и пружины описывается уравнением

$$z = C_1 \sin p_0 t + C_2 \cos p_0 t, \qquad (1)$$

где $p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота собственных колебаний груза, присоединенного к пружине, c – жесткость пружины.

При $t = 0$, $z = 0$ и $\dot{z} = v_0$ постоянные

$$C_1 = \frac{v_0}{p_0},\ C_2 = 0 \text{ и } z = \frac{v_0}{p_0} \sin p_0 t,\ z_{max} = \frac{v_0}{p_0}.$$

Наибольшая величина силы P_{max}, сжимающей пружину (динамическая нагрузка), определяется выражением

$$P_{max} = z_{max} c = \frac{v_0 c}{p_0}. \qquad (2)$$

Из условия энергетического баланса [4], приравнивая кинетическую энергию движущегося груза T потенциальной энергии сжатой пружины П, можно получить

$$T = \Pi = \frac{m v_0^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{P_{max}^2}{c},\ P_{max} = v_0\sqrt{mc} = \frac{v_0 c}{p_0}.$$

При ударе груза массой m, движущегося вертикально со скоростью v_0, по пружине с массой $m_s = 0$, пружина получает динамический прогиб $z_д$.

$$z_д = z_c\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{c z_c^2}}\right], \qquad (3)$$

или $z_д = z_c \chi$,

где $z_c = \frac{mg}{c}$ – статический прогиб, который получила бы пружина под действием приложенной силы.

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{c z_c^2}}, \qquad (4)$$

где χ – коэффициент динамичности, $\chi = \frac{z_д}{z_с}$.

Внутренние силы и напряжения изменяются при ударе в том же соотношении $\sigma_д = \chi\sigma_с$.

Коэффициент динамичности зависит от жесткости системы и кинетической энергии падающего груза. В частности, при мгновенном опускании груза кинетическая энергия $T = 0$ и тогда $\chi = 2$. В этом случае

$$z_{max} = 2z_с, \sigma_д = 2\sigma_с.$$

При ударе груза массой m, движущегося вертикально со скоростью v_0, по пружине с буфером массой m_1 на ней, обе массы после удара движутся с общей скоростью v.

Из условия сохранения количества движения $mv_0 = (m + m_1)v_1$

$$v_1 = \frac{mv_0}{(m + m_1)}.$$

Формула (4) в этом случае примет вид

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T}{cz_c^2(1+m_1/m)}}. \qquad (5)$$

На рисунке представлена зависимость коэффициента динамичности χ от начальной скорости груза v_0 при различных соотношениях масс $k = \frac{m_1}{m} = 0{,}25; 0{,}5; 1$ и значении $c = 100$ Н/м.

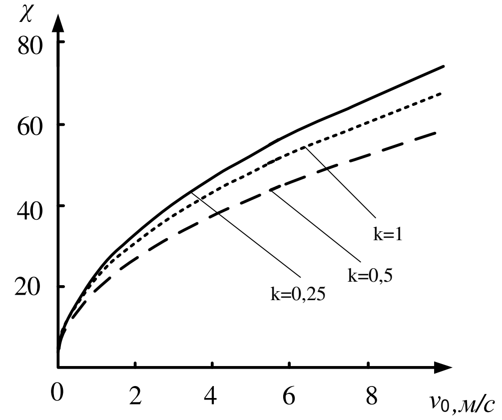

Рис. Зависимость коэффициента динамичности χ от начальной скорости груза v_0

Модель с множеством степеней свободы

Движение системы с N степенями свободы описывается дифференциальными уравнениями вида [5]

$$m_k\ddot{Z}_k + \sum_{r=1}^{N}(a + ib)c_{kr}z_r = 0\,, (k = 1,2, \ldots, N), \qquad (6)$$

где z_k – комплексные перемещения массы m.

Вещественные перемещения ReZ_k обозначим z_k при начальных условиях

$$z_k(0) = 0, m_k\dot{z}_k(0) = S_k^0. \qquad (7)$$

$$z_k = \sum_{i=1}^{N} z_{ik}e^{-\frac{\gamma}{2}p_it}\, cos(p_it + \nu_i). \qquad (8)$$

Выражение (8) представляет собой разложение решений диссипативной системы уравнений (6) по формам собственных колебаний. Представим z_{ik} в виде разложения:

$$z_{ik} = c_k\varphi_{ik},$$

где φ_{ik} – коэффициенты форм собственных колебаний, определяемые из $N(N-1)$ уравнений.

$$\varphi_{ik} = p_i^2\sum_{i=1}^{N} m_r\delta_{ir}\varphi_{kr}.$$

Из $2N$ уравнений

$$cos\, \nu_i = 0;$$

$$m_i\sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_{ik}p_i = -S_i^0, \quad i = 1,\, 2, \ldots N,$$

при начальных условиях (7) определяем ν_iи c_k.

Тогда решение (8) примет вид

$$z_k = \sum_{i=1}^{N} z_{ik}e^{-\frac{\gamma}{2}p_it}\sin p_i\, t,$$

где $z_{ik} = \frac{\varphi_{ik}}{p_i\sum_{r=1}^{N}\varphi_{ir}S_r^0}$, $p_i = \left[1 + \frac{\gamma^2}{4}\right]^{-(1/2)p_i^0}$;

p_i^0 – угловые частоты незатухающих колебаний, определяемые из уравнения $\left|m_r\delta_{ir} - (p_i^0)^2\chi_{ir}\right| = 0$ при $\gamma = 0\ (a = 0,\, b = 0)$, в данном случае $p_i = p_i^0$; χ_{ir} – символ Кронекера; $\chi_{ir} = 1$ при $i = r$, $\chi_{ir} = 0$ при $i \neq r$; δ_{ir}– перемещение массы m_i от статического действия единичной силы на массу m_r.

Обсуждение

Разработанные модели могут найти широкое применение в технике и технологиях, например строительные балочные и стержневые конструкции, мачтовые сооружения.

Немаловажным является возможность моделировать поведение диссипативных систем с учетом трения (8).

Модели позволяют исследовать динамические процессы, происходящие под действием импульсных нагрузок.

Для адекватного описания процессов, происходящих под действием ударных нагрузок, может привлекаться аппарат численно-аналитического моделирования, который предполагает использование численных методов и вычислительной техники.

Заключение

Развита теория построения моделей гетероструктур. Предложены фундаментальные математические модели гетероструктур, используемых для описания процессов в системах мехатроники. Изучено на моделях поведение гетероструктур при наличии воздействия в виде ударной нагрузки. Представлены результаты моделирования. Описаны обобщенная модель гетероструктур со множеством степеней свободы.

Литература

1. Kazantsev, N. R. Application of fundamental laws of nature in creating mathematical models / N. R. Kazantsev // Молодежь. Общество. Современная наука, техника и инновации. – 2021. – № 20. – P. 29–30.

2. Ерохин, С. В. Применение численно-аналитических методов в моделировании строительных конструкций / С. В. Ерохин, С. В. Шашкин // Научно-технический вестник Поволжья. – 2021. – № 2. – С. 57–60.

3. Численное моделирование воздействия сейсмических волн на породный массив, вмещающий под-

земные сооружения / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Я. Н. Выходцев, Ч. Т. Нгуен // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2022. – № 7. – С. 115–130. – DOI 10.25018/0236_1493_2022_7_0_115.

4. Большаков, А. А. Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение / А. А. Большаков // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 8 (89). – С. 128–133.

5. Справочник проектировщика / под редакцией В. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – Москва : Стройиздат, 1984. – 304 с.

M.I. Volnikov[1], E.M. Volnikov[2]
[1]Penza State Technological University,
[2]Moscow Aviation Institute

FUNDAMENTAL MODELS OF HETEROSTRUCTURES DYNAMICS

Relevance is due to the lack of knowledge and development of models of dynamics of complex heterostructures. Modern mechatronic systems operate under extreme conditions, which are caused by kinematic, dynamic, temperature, vibration and other external factors and are exposed to external influences. The study of fundamental foundations and the development of heterostructural models of dynamics on models with many degrees of freedom allow to study the behavior of heterorstructures under the action of mechanical and vibrational forces. This requires the construction of appropriate mathematical models that allow to describe processes occurring in complex heterostructures with a sufficient degree of adequacy.

Differential equations, heterostructures, mechatronics, impact processes.