УДК 001.891.572

М.И. Вольников
Пензенский государственный технологический университет

МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЙ ЗАЩИТЫ ГЕТЕРОСТРУКТУР МЕХАТРОНИКИ

Актуальность обусловлена недостаточно изученностью и разработанностью моделей динамики технических систем при импульсных воздействиях. Современные мехатронные системы, состоящие из сложных гетерогенных структур, часто работают в экстремальных условиях, обусловленных импульсными воздействиям. Для создания надежной системы защиты сложных гетероструктур от импульсных воздействий необходимо построение соответствующих математических моделей, позволяющих с достаточной степенью адекватности описывать процессы, происходящие в гетероструктурах. Целью работы является изучение и развитие моделей гетероструктур, базирующихся на уравнениях динамики точки под действием импульсных нагрузок при наличии и отсутствии внутреннего трения в гетероструктурах.

Импульсные воздействия, теория, модели динамики гетероструктур.

Сложные системы, в большинстве случаев представляющие собой гибридные гетероструктуры, постоянно подвергаются внешним воздействиям, в том числе в виде импульсов силы, подвергая систему значительным перегрузкам, способных вызвать необратимые деградационные процессы в материалах гетероструктур, приводящие к образованию трещин, расслоению печатных плат, нарушению паяных контактов, разрушению сварных швов и т.п.

Для динамических перемещений используются фундаментальные модели гетероструктур без учета и с учетом внутреннего трения, позволяющие анализировать результаты воздействий импульсных нагрузок на изделия мехатроники.

В простейшем случае это гетероструктуры с одной, а в общем случае с несколькими степенями свободы, для которых требуется составления систем линейных или нелинейных дифференциальных уравнений.

Разработке моделей сложных систем под действием импульсных нагрузок посвящена данная статья.

Воздействие одиночного импульса

Дифференциальное уравнение движения системы под действием некоторой силы $P(t)$ без учета внутреннего трения имеет вид

$$m\ddot{z}(t) + cz(t) = P(t), \qquad (1)$$

где z – перемещение системы; m – ее масса; c – коэффициент жесткости.

Ищем решение при нулевых начальных условиях $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$.

Для интервала времени $0 \le t \le \tau$ решение имеет вид

$$z = \frac{P_0}{mp_0}\int_0^t f(t')\sin p_0\,(t - t')dt', \qquad (2)$$

и для $t > \tau$

$$z = \frac{P_0}{mp_0}\int_0^\tau f(t')\sin p_0\,(t - t')dt', \qquad (3)$$

где P_0 – максимум силы; t – момент времени, для которого определяется перемещение; τ – продолжительность действия силы; p_0 – круговая частота свободных незатухающих колебаний системы.

$$p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T_1},$$

где T_1 – период.

Наиболее часто используемые формы $f(t')$ импульсных нагрузок представлены в [1, 2]. При подстановке выражений для $f(t')$ в (2) и (3) и обозначив $p_0 t = \xi$, $p_0\tau = \alpha$, $\frac{P_0}{c} = z_c$ получаем формулы для определения $z(t)/z_c$ для шести форм импульсов. Здесь z_c – статический прогиб системы под действием силы P_0.

Амплитудные значения перемещений – $z_д$, выраженные в зависимости от соотношения

$$z_д = \chi\left(\frac{\tau}{T_1}\right) z_c,$$

где χ – динамический коэффициент.

Вычислив статически прогиб z_c по формуле $\frac{P_0}{c} = z_c$ и коэффициент динамичности χ из графиков [3, 4] можно определить амплитудные значения системы $z_д = z_c\chi$, имеющие максимумы от 0,5 до 1,0 отношения $\frac{\tau}{T_1}$.

Воздействие периодических импульсов

При определении движения системы под действием периодических импульсов учтем внутреннее трение в системе [5], которое в задачах о сводных колебаниях диссипативных систем реализуется с использованием гипотезы комплексной жесткости [3, 6]

$$m\ddot{Z}(t) + (a + ib)cZ(t) = 0, \tag{4}$$

где $Z(t)$ – комплексное перемещение системы; i – мнимая единица,

$$a = \frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}, b = \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)},\ \alpha = \frac{\gamma}{2},$$

где γ – коэффициент внутреннего трения, связанный с коэффициентом потерь

$$\eta = \gamma/(1-\gamma^2/4).$$

Подставив $Z = Ae^{p^*t}$ в (4) получим характеристическое уравнение

$$p^{*2}(a+ib)p_0^2, \text{где } p_0 = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

решение которого имеет вид

$$p^* = \pm i(1+i\alpha)p, \text{где } p = (1+\alpha^2)^{-1/2}\cdot p_0.$$

Тогда

$$Z = (A - iB)e^{-\alpha pt}e^{ipt},$$

из которого получим вещественное решение $z = Re(Z)$:

$$z = e^{-\frac{\gamma}{2}pt}\left(A\cos\ pt + B\sin\ pt\right). \tag{5}$$

Круговая частота затухающих колебаний и логарифмический декремент δ, не зависящий от частоты,

$$p = \frac{p_0}{\sqrt{1+\gamma^2/4}},\quad \delta = \pi\gamma. \tag{6}$$

При начальных условиях $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \upsilon_0$ решение примет вид

$$z = e^{-\frac{\gamma}{2}pt}\left(z_0\cos pt + \left(\frac{\upsilon_0}{p} + \frac{\gamma z_0}{2}\right)\sin\ pt\right). \tag{7}$$

Подставляя в (7) начальные условия $z_0 = 0$, $\upsilon_0 = S_0m^{-1}$, соответствующие приложению импульса S_0 к неподвижной системе в момент $t = 0$, получим

$$z = \frac{S_0}{mp}e^{-\frac{\gamma}{2}pt}\sin pt. \tag{8}$$

Для конечного числа $n+1$ периодических импульсов с периодом T_0 решение ищем методом наложением функций (8) с разными началами отсчета времени

$$z_n = \frac{S_0}{mp}\sum_{r=0}^{n} e^{-\frac{\gamma}{2}p(t-rT_0)}\sin p\,(t - rT_0), \tag{9}$$

где z_n – перемещение спустя n периодов T_0 , $nT_0 \le t(n+1)T_0$, n – число повторений импульсов; при $n = 0$ соответствует одному импульсу.

Введем относительное время

$$t^* = \frac{t - nT_0}{T_1}\quad (0 \le t^* \le \theta),$$

(9) примет вид

$$z_n = \frac{S_0}{mp_0}e^{-\gamma\pi t^*}(A_n\sin 2\pi t^* + B_n\cos 2\pi t^*), \tag{10}$$

где

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-b'k}\cos a'k =$$
$$= \frac{e^{b'} - \cos a' - e^{-nb'}\cos(n+1)a' + e^{-(n+1)b'}\cos na'}{2(\mathrm{ch}b' - \cos a')}$$
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-b'k}\sin a'k =$$
$$= \frac{\sin a' - e^{-nb'}\sin(n+1)a' + e^{-(n+1)b'}\sin na'}{2(\mathrm{ch}b' - \cos a')} \tag{11}$$

$$a' = 2\pi\theta,\ \theta = \frac{T_0}{T_1},\ b' = \gamma\pi\theta,\ \ n - r' = k.$$

При небольшом n выражение (9) описывает неустановившееся колебания системы. Амплитуда колебаний равна

$$z_n^{max} = \frac{S_0}{mp_0}e^{-\gamma\pi t_0^*}\sqrt{(A_n^2 + B_n^2)},$$

где t_0^* – наименьшее положительное значение, полученное из выражения

$$t^* = \frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}\frac{2A_n - \gamma B_n}{2B_n + \gamma A_n}.$$

При малой диссипации $\gamma \le 0{,}1$ получим

$$z_n^{max} = \frac{S_0}{mp_0}\sqrt{(A_n^2 + B_n^2)}. \tag{12}$$

Глобальный максимум устанавливается при анализе n – значений z^{max}.

При $\frac{T_0}{T} = N$ на частоте собственных колебаний наступает импульсный резонанс, амплитуда которого приближенно можно определить по формуле

$$z_n^{max} \approx \frac{S_0}{mp_0}\frac{1 - e^{-\gamma\pi N(n+1)}}{1 - e^{-\gamma\pi N}}. \tag{13}$$

Наибольший максимум z_n^{max} соответствует $N = 1$.

При большом n колебания будут установившимися. Тогда в этом случае, при $n \to \infty$

$$z_n^{max} = \frac{S_0}{mp_0}\frac{e^{b^{1/2}}e^{-\gamma\pi t_0^*}}{\sqrt{2(\mathrm{ch}b' - \cos a')}}.$$

При малой диссипации ($\gamma \le 0{,}1$) решение можно представить приближенно в виде

$$z_n^{max} \approx \frac{S_0}{mp_0}\frac{e^{b^{1/2}}}{\sqrt{2(\mathrm{ch}b' - \cos a')}}.$$

При $\frac{T_0}{T} = N$ наступает импульсный резонанс.

Резонансную амплитуду можно определить по формуле

$$z_{\text{рез}}^{max} = \frac{S_0}{mp_0}\frac{1}{1 - e^{-\gamma\pi N}}. \tag{14}$$

Разработанные модели могут найти широкое применение в технике и технологиях. Одним из применением являются строительные балочные и стержневые конструкции, мачтовые сооружения. Немаловажным является возможность моделировать поведение диссипативных систем с учетом трения. Модели позволяют исследовать динамические процессы, происходящие под действием импульсных нагрузок.

Развита теория построения моделей гетероструктур специальной мехатроники. Предложены фундаментальные математические модели гетероструктур мехатроники. Построены модели гетероструктур при наличии воздействия в виде периодической и импульсной нагрузок. Представлены результаты моделирования гетероструктур под воздействием динамических нагрузок различных типов. Описаны общая модель многослойных гетероструктур и со множеством степеней свободы. Разработан алгоритм решения вариационной задачи, предложена методика ее решения.

Литература

1. Здания и сооружения, подверженные динамическим воздействиям. Правила проектирования: свод правил СП 413.1325800.2018. – Москва : Стандартинформ, 2019.

2. Динамика гетерогенных структур. Виброударозащита гетерогенных структур. Том 3. Смогунов В. В., Климинов И. П., Вдовикина О. А., Вольников М. И. / Под редакцией В. В. Смогунова – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005.– 497 с.

3. Справочник проектировщика / Под ред. В. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – Москва : Стройиздат, 1984. – 304 с.

4 Инженерные методы исследования ударных процессов / Г. С. Батуев и др. – Москва : Машиностроение, 1977. – 240 с.

5 Вольников, М. И. Учет трения в математических моделях диссипативных систем / М. И. Вольников, В. В. Смогунов // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – № 2. – С. 110–118.

6 Вольников, М. И. Математические модели динамики гетероструктур с трением / М. И. Вольников, В. В. Смогунов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 98–108. – DOI 10.21685/2072-3059-2020-3-10.

M.I. Volnikov

Penza State Technological University

MODELS OF PROTECTION TECHNOLOGIES FOR MECHATRONICS HETEROSTRUCTURES

The article is devoted to the study and development of models of heterostructures based on the equations of the dynamics of a point under the influence of pulsed loads in the presence and absence of internal friction in heterostructures. The relevance is due to the insufficiently studied and developed models of the dynamics of technical systems under pulsed influences. Modern mechatronic systems, consisting of complex heterogeneous structures, often operate in extreme conditions due to pulsed influences. To create a reliable system for protecting complex heterostructures from impulsive influences, it is necessary to build appropriate mathematical models that allow a sufficient degree of adequacy to describe the processes occurring in heterostructures.

Pulse influences, theory, models of heterostructure dynamics.