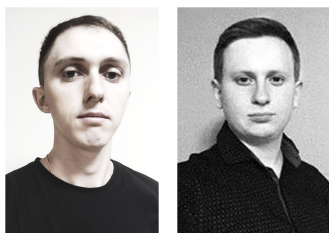


УДК 69.04



О.Е. Конейкин, Л.С. Шевцов  
Вологодский государственный университет

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА СТАЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ ПО КРИТЕРИЮ ПРОЧНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

В статье представлен подход к определению вероятности отказа стального стержня при изгибе по критерию прочности нормальных сечений. На основе предложенного подхода можно выполнить подбор сечения конструктивного элемента (прогон, балка и др.) на заданный уровень надежности. В качестве метода оценки вероятности отказа используется метод Монте-Карло, численная реализация которого может быть выполнена на базе простых программ. В отличие от метода предельных состояний, на основе разработанных алгоритмов можно выполнить оптимизацию сечения стального элемента из условия эффективного соотношения критерия безопасности и металлоемкости конструкции.

Надежность, вероятностное проектирование, стальная балка, вероятность отказа, изгиб, предельное состояние, неопределенность.

Надежность строительных конструкций является ключевым показателем при проектировании, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений. Согласно текущей концепции проектирования строительных конструкций надежность строительного объекта считается обеспеченной, если выполняются требования (критерии) для всех учитываемых предельных состояний при действии наиболее неблагоприятных сочетаний расчетных нагрузок в течение расчетного срока службы. Количественный показатель надежности в нормах на текущий момент не присутствует.

В рамках теории надежности строительных конструкций как фундаментальной науки [1, 2] предлагается измерять надежность в виде вероятности отказа  $P_f$  или индекса надежности  $\beta$ . Вычисление этих показателей требует использования полных вероятностных расчетов в проектировании строительных конструкций [3–6].

Рассмотрим стальную балку с поперечным сечением в виде двутавра, обозначения размеров которого приведены на рисунке 1. Момент сопротивления сечения балки относительно оси  $x$  можно вычислить по формуле:

$$W_x \approx \frac{2}{h} \cdot \left[ \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \left[ \frac{b_w \cdot h_w^3}{12} \right] \right], \quad (1)$$

где обозначения геометрических параметров приведены на рисунке 1.

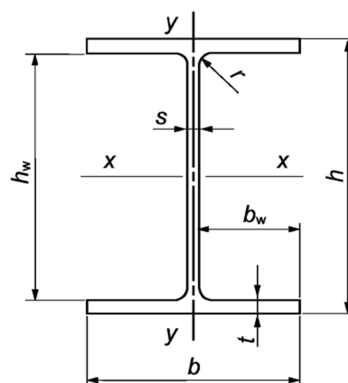


Рис. 1. Обозначения размеров поперечного сечения двутавра в соответствии с ГОСТ Р 57837-2017 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок»

Пусть балка является однопролетной и имеет шарнирно-подвижную и шарнирно неподвижную опоры и загружена равномерно-распределенной нагрузкой  $q$  по всему пролету. Тогда условие обеспечения прочности балки по критерию прочности нормальных сечений можно представить в виде:

$$\tilde{q} < \tilde{\sigma}_{s,ult} \cdot \frac{16}{\tilde{h} \cdot l^2} \cdot \left( \frac{\tilde{b} \cdot \tilde{h}^3}{12} - 2 \cdot \left[ \frac{\tilde{b}_w \cdot \tilde{h}_w^3}{12} \right] \right), \quad (2)$$

где  $\tilde{\sigma}_{s,ult}$  – предельное напряжение, соответствующее пределу текучести стали (волнистой линией обозначается случайная величина);

$l$  – пролет балки (детерминированная, постоянная величина).

Примем за основу расчета двутавр 20Б1 пролетом 4 м со случайными параметрами по таблице.

По результатам генерации 100 000 значений по указанным в таблице параметрам можно получить функцию распределения для момента сопротивления рассматриваемого сечения (рис. 2). В запас надежности рассматривается статистическая независимость параметров при вычислении момента сопротивления.

Для предела текучести стали принято нормальное распределение с коэффициентов вариации 5 %. В ис-

следовании Г. Шпете [7] отмечается, что коэффициент вариации зависит от типа стальной продукции:

Один и тот же стальной профиль с одного завода: 0,01–0,04;

различные профили с одного завода: 0,04–0,07;

одинаковые профили с разных заводов: 0,05–0,08;

различные профили с разных заводов: 0,06–0,12.

В нормативном документе Joint Committee on Structural Safety Probabilistic Model Code 2001 [8] предлагается использовать коэффициент вариации 0,07.

Таблица

**Статистические параметры величин в математической модели**

Параметр	Распределение	Параметры	Примечание
Ширина двутавра $\tilde{b}$	Равномерное	[97; 103] мм	Допуск $\pm 3$ мм по ГОСТ Р 57837-2017
Высота двутавра $\tilde{h}$	Равномерное	[197; 203] мм	Допуск $\pm 3$ мм по ГОСТ Р 57837-2017
Высота (ч) $\tilde{h}_w$	Равномерное	[181; 187] мм	Допуск толщины полки $t \pm 1,5$ мм по ГОСТ Р 57837-2017
Ширина (ч) $\tilde{b}_w$	Равномерное	[46,9; 47,6] мм	Допуск толщины полки $t \pm 0,7$ мм по ГОСТ Р 57837-2017
Пролет $l$	Постоянная (детерминированная) величина	4000 мм	-
Предельное напряжение, соответствующее пределу текучести стали $\tilde{\sigma}_{s,ult}$	Нормальное	$m_\sigma = 277,85$ МПа; $S_\sigma = 13,89$ МПа	Сталь С255
Равномерно-распределенная нагрузка $\tilde{q}$	Нормальное	$m_q = 25$ кН/м; $S_q = 4$ кН/м	-

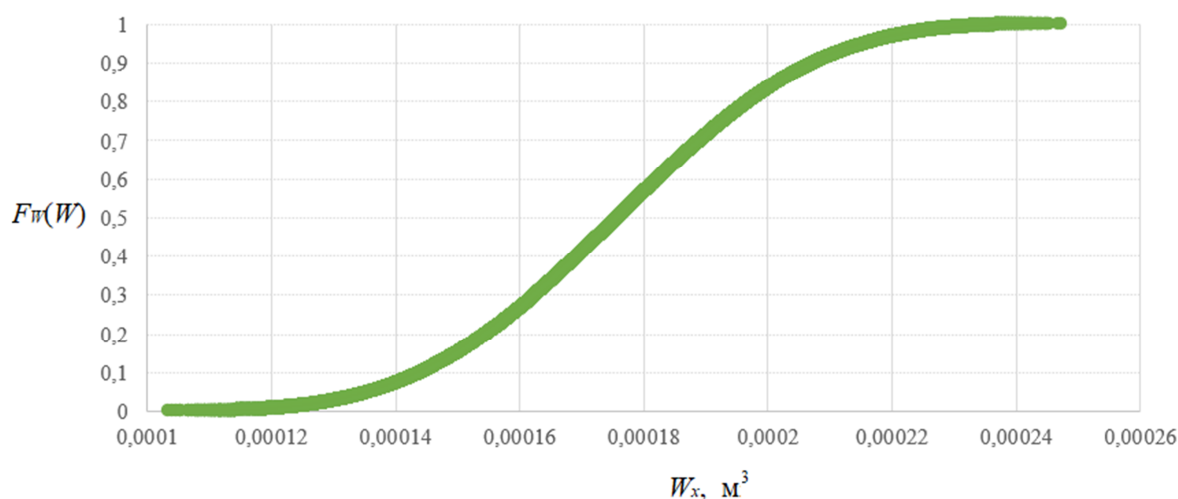


Рис. 2. Функция распределения вероятностей для момента инерции  $\tilde{W}_x$  как случайной величины по результатам генерации данных

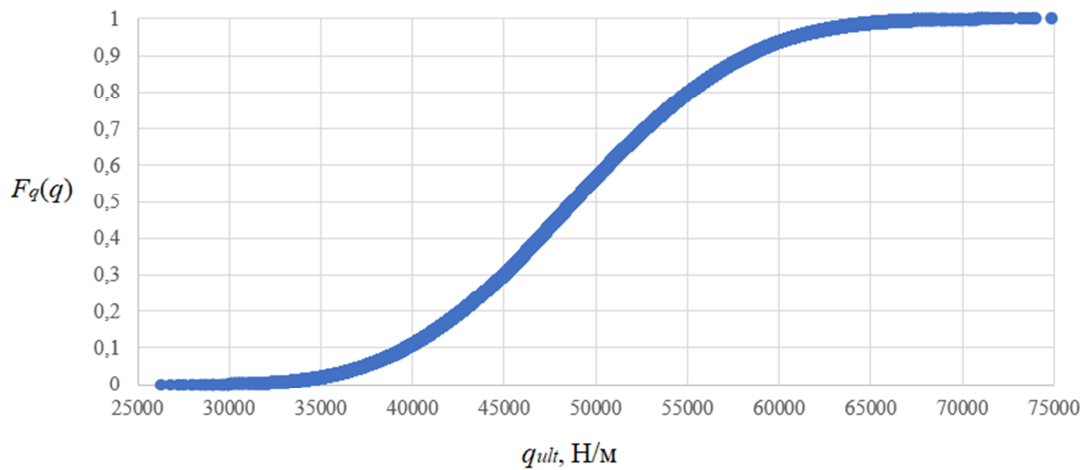


Рис. 3. Функция распределения вероятностей для момента инерции  $\tilde{W}_x$  как случайной величины по результатам генерации данных

Вероятность отказа  $P_f$  на основе классического метода Монте-Карло определяется как:

$$P_f \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I[g(X_j) \leq 0], \quad (3)$$

где  $I[\cdot]$  – это функция индикатора, имеющая значение 1, если  $I[\cdot]$  равно «истина», и значение 0, если  $I[\cdot]$  равно «ложь»;  $N$  – число генераций случайных величин;  $X_j$  – вектор случайных величин функции предельного состояния  $g$ .

Генерация случайных величин по основным законам распределения вероятностей (нормальный, равномерный и т.д.) может быть выполнена, например, в программной среде MathCAD. Однако зачастую функция распределения вероятностей может отличаться от известных распределений или представлять собой модель частично непараметрического р-блока. Генерация базовыми подходами в таком случае становится невозможной. В этом случае можно использовать метод обратного преобразования Н.В. Смирнова: генерируются  $N$  значений равномерно распределенной случайной величины  $u_i$  в пределах от  $[0; 1]$ . Значения случайной величины в виде  $x_i$  получают методом обратного преобразования  $x_i = F^{-1}(u_i)$ .

Для рассматриваемого случая функция предельного состояния  $g$  примет вид:

$$g = \tilde{\sigma}_{s,ult} \cdot \frac{16}{\tilde{h} \cdot l^2} \cdot \left( \frac{\tilde{b} \cdot \tilde{h}^3}{12} - 2 \cdot \left[ \frac{\tilde{b}_w \cdot \tilde{h}_w^3}{12} \right] \right) - \tilde{q} < 0 \quad (4)$$

На рисунке 3 представлен график функции распределения предельной нагрузки  $q$  по условию (4).

Сгенерируем 100 000 значений эксплуатационной нагрузки  $\tilde{q}$  с параметрами по таблице. Из сравнения генераций по формуле (4) установлено, что в 398 случаях функция предельного состояния  $g$  приняла

отрицательные значения. Таким образом, вероятность отказа стальной балки можно оценить как:

$$P_f \approx \frac{398}{100000} = 0,00398 \text{ или } 3,98 \%$$

Проанализируем изменение вероятности отказа при изменении допуском на различные параметры двутавра. Пусть допуск на высоту двутавра  $\tilde{h}$  составит  $\pm 2$  мм, при сохранении допуска толщины полки  $t \pm 1,5$  мм, а ширина  $\tilde{b}$  двутавра также будет иметь пониженный допуск  $\pm 2$  мм; тогда границы для генерации значений примут следующий вид:

$$\tilde{h} \in [198, 202] \text{ мм}, \quad \tilde{b} \in [98, 102] \text{ мм}.$$

Повторная генерация случайных величин показывает превышение предельного состояния в 329 случаях из 100 000. Таким образом, вероятность отказа стальной балки можно оценить как:

$$P_f \approx \frac{329}{100000} = 0,00329 \text{ или } 3,29 \%$$

При установке более строгих допусков с  $\pm 3$  мм до  $\pm 2$  мм получается определенный результат, выраженный в снижении вероятности отказа двутавра на 17 % или на 0,69 % в абсолютных показателях.

Таким образом, на основе предложенной методики к анализу вероятности отказа стальной балки при изгибе по критерию прочности нормальных сечений можно выполнить оптимизацию сечения стального элемента из условия эффективного соотношения критерия безопасности и металлоемкости конструкции. Использование дополнительных инструментов технико-экономической оптимизации [9, 10] позволит включить многопараметрическую оптимизацию элемента и выявить наиболее рациональное поперечное сечение с учетом всех групп предельных состояний, фактора риска и экономических характеристик.

### Литература

1. Соловьева, А. А. Вероятностные модели случайных величин в строительном проектировании / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2024. – 144 с.
2. Zhang H., Dai H., Beer M., Wang W. Structural reliability analysis on the basis of small samples: An interval quasi-Monte Carlo method. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2013. Vol. 37. No. 1-2. Pp. 137–151.
3. Soloveva, A. A. Reliability Analysis of RHS Steel Trusses Joints Based on the P-Boxes Approach / A. A. Soloveva, S. A. Solovev // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2021. – Vol. 17. – No 1. – P. 87–97.
4. Соловьев, С. А. Вероятностная оценка промышленной безопасности при неполной статистической информации / С. А. Соловьев // *Безопасность труда в промышленности*. – 2020. – № 9. – С. 88–93.
5. Zhang, H. Structural analysis with probability-boxes / H. Zhang, R. L. Mullen, R. L. Muhanna // *International Journal of Reliability and Safety*. – 2012. – Vol. 6. – No. 1-3. – Pp. 110–129.
6. Соловьева, А. А. Вероятностный анализ надежности ферм статистическим генерированием данных / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2023. – № 5(310). – С. 2–11.
7. Шпете, Г. Надежность несущих строительных конструкций / Герхард Шпете ; перевод с немецкого О. О. Андреева. – Москва : Стройиздат, 1994. – 287 с.
8. Vrouwenvelder, T. Reliability Based Code Calibration–The Use of the JSCC Probabilistic Model Code. *Joint Committee of Structural Safety / T. Vrouwenvelder // Workshop on Code Calibration*. – 2003. – Vol. 21. – P. 1–22.
9. Holicky, M. Optimisation of the target reliability for temporary structures / M. Holicky // *Civil Engineering and Environmental Systems*. – 2013. – Vol. 30, No. 2. – P. 87–96.
10. Соловьев, С. А. Неклассические методы анализа надежности строительных конструкций / С. А. Соловьев. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2022. – 135 с.

*O.E. Kopeykin, L.S. Shevtsov*  
*Vologda State University*

### STUDY OF FAILURE PROBABILITY FOR FLEXURAL STEEL BEAM ACCORDING TO THE NORMAL SECTIONS STRENGTH CRITERION

The article presents an approach to estimation of the failure probability of a flexural steel rod according to the criterion of normal sections strength. Based on the proposed approach, it is possible to select the cross-section of a structural element (girder, beam, etc.) for a target level of reliability. The Monte Carlo Simulation is used as a method for estimating the failure probability, the numerical implementation of which can be performed on the basis of simple programs. Unlike the limit state design method, it is possible to optimize the section of a steel element based on the developed algorithms from the condition of an effective ratio of the safety criterion and the metal content of the structure.

Reliability, probabilistic design, steel beam, probability of failure, bending, limit condition, uncertainty.