



ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ВИДЕ Р-БЛОКА

В статье представлена экспериментальная верификация новой модели случайной величины в виде р-блока. Р-блок представляет собой две граничные функции распределения вероятностей, создающие область, внутри которой находится действительная, но наперед неизвестная ФРВ, по причине эпистемологической неопределенности данных (малое число испытаний, малая точность испытаний и т. д.). Испытания 50 контрольных образцов стали на растяжение отражают сужение границ новой модели р-блока, построенной на основе неравенства Дворецкого – Кифера – Вульфовица, и функций распределения возможностей, что позволяет избегать гипотезы о конкретном вероятностном распределении в рамках экспериментальных исследований.

Надежность, р-блок, неравенство Дворецкого – Кифера – Вульфовица, сталь, медиана, случайная величина, неопределенность.

В рамках практических инженерных задач по анализу надежности строительных конструкций в стохастической постановке возникает необходимость моделирования случайных величин с учетом неопределенности данных.

Как правило, выделяют две группы неопределенностей: алеаторную и эпистемологическую. Алеаторная неопределенность моделируется путем использования классических функций распределения вероятностей случайной величины и отражает физическую природу изменчивости параметра. Эпистемологическая неопределенность представляет собой недостаток знаний об объекте – малое число испытаний, малая точность измерительных приборов и т. д. Эффективным инструментом для одновременного моделирования обоих видов неопределенностей является р-блок (probability box) [1–5].

В данной работе предлагается экспериментальная верификация нового вида р-блока, разработанного в предыдущем исследовании [5].

Основу конструкции нового р-блока составляет неравенство Дворецкого – Кифера – Вульфовица [6], которое отражает, насколько близка эмпирическая функция распределения вероятностей к функции распределения, из которой получены эмпирические выборки:

$$\Pr\left(\sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\right) \leq C \cdot e^{-2n\varepsilon^2}, \quad (1)$$

где ε – любое положительное число; n – количество испытаний/измерений в выборочной совокупности данных; C – множитель-константа, принимаемый равным 2.

Данное неравенство трансформируется к виду $\underline{F}_{DKW} = F_n(x) - \varepsilon \leq F(x) \leq \overline{F}_{DKW} = F_n(x) + \varepsilon$,

где $\varepsilon = \sqrt{\frac{\ln \frac{2}{\alpha}}{2n}}$, α – доверительная вероятность; что

позволяет сформировать область неопределенности от эмпирической функции распределения вероятностей, в которую входит действительная функция распределения.

Тем не менее данная конструкция обладает недостатком – неинформативным распределением «хвостов» (рис. 1), которые уходят в бесконечность на некоторой критической статистике ε .

Для устранения этого недостатка, «хвосты» р-блока описываются функциями распределения возможностей с аналитическим видом:

$$\underline{F}_x(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{a_x - x}{b_x}\right)^2\right], & \text{если } x < a_x, \\ 1, & \text{если } x \geq a_x \end{cases}, \quad (2)$$

$$\overline{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a_x \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{a_x - x}{b_x}\right)^2\right], & \text{если } x \geq a_x \end{cases} \quad (3)$$

где $a_x = 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$ – условное «среднее»; $b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min})/\sqrt{-\ln \alpha}$ – мера «рассеяния», где X_{\max} и X_{\min} – наибольшее и наименьшее значение во множестве значений $\{x\}$, полученных из результатов измерений (испытаний); $\alpha \in [0; 1]$ – уровень среза (риска), значения которого задаются таким образом, чтобы функции F_{DKW} и $F_x(x)$ пересекались в крайней точке «скачка» (рис. 1).

Дополнительно снизить область неопределенности р-блока позволяет интервальная оценка медианы. Для оценки медианы распределения генеральной со-

вокупности по выборочной совокупности данных используются доверительные интервалы. В соответствии с Национальным стандартом ГОСТ Р ИСО 16269-7-2004 «Статистические методы. Статистическое представление данных. Медиана» доверительный интервал для медианы в случае малых выборок ($5 < n < 100$) можно определить по формуле:

$$[\text{med } \underline{X} = x_{[k]}; \text{med } \overline{X} = x_{[n-k+1]}], \quad (4)$$

где k – номер порядковой статистики, используемый для определения нижней доверительной границы; n – объем выборочной совокупности данных.

Если распределение непрерывно, то медиана является одним из решений уравнения $F(\text{med}[X]) = 0,5$. Можно также сказать, что медиана является 50-м перцентилем, 0,5-м квантилем или 2-м квартилем выборки или распределения. Исходя из этого распределения, а также из того, что функция

распределения вероятностей случайной величины является неубывающей, можно снизить область эпистемологической неопределенности данных, как это показано на рисунке 1.

В ходе проведения исследования были испытаны 50 контрольных образцов стали на прочность при растяжении. Для описания прочности стали как случайной величины использовалась предложенная конструкция р-блока. Из графиков (рис. 2) следует, что с ростом числа испытаний границы р-блока постепенно сходятся к эмпирической функции распределения вероятностей, а область эпистемологической неопределенности (серая заливка) снижается с ростом числа испытаний. На всех этапах испытаний эмпирическая функция распределения вероятностей $F_{emp}(x)$ покрывается площадью р-блока.

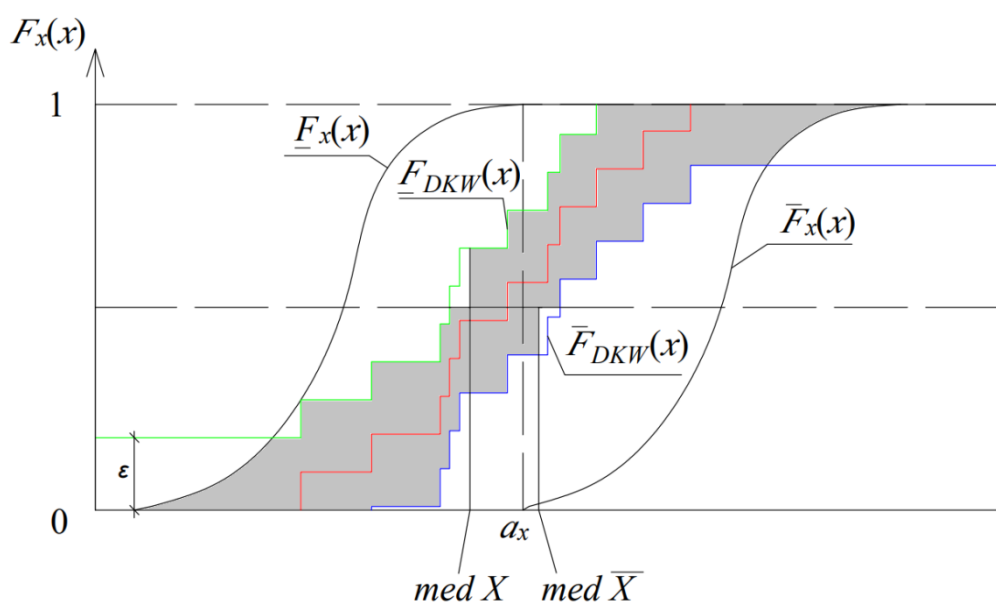


Рис. 1. Р-блок случайной величины X

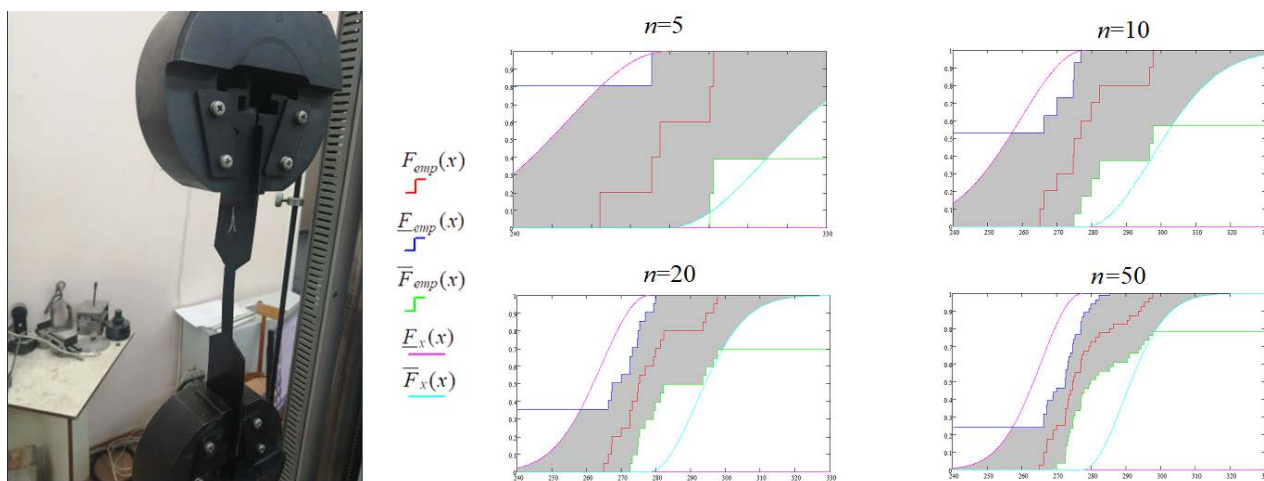


Рис. 2. Снижение области неопределенности р-блока с ростом числа испытаний n

Разработанная модель р-блока может использоваться в качестве модели случайной величины в задачах вероятностной оценки надежности строительных конструкций при малом числе испытаний/измерений, когда эпистемологическая неопределенность данных имеет особое влияние на результат расчета.

Литература

1. Crespo, L. G. Reliability analysis of polynomial systems subject to p-box uncertainties / L. G. Crespo, S. P. Kenny, D. P. Giesy // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2013. – Vol. 37, № 1–2. – P. 121–136.

2. Simon, C. Hybrid computation of uncertainty in reliability analysis with p-box and evidential networks / C. Simon, F. Bicking // *Reliability Engineering & System Safety*. – 2017. – Vol. 167. – P. 629–638.

3. Соловьев, С. А. Методы оценки надежности стальных ферм с использованием р-блоков / С. А. Соловьев, А. А. Соловьева. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2022. – 143 с.

4. Structural reliability analysis based on probability and probability box hybrid model / X. Liu, Z. Kuang, L. Yin, L. Hu // *Structural Safety*. – 2017. – Vol. 68. – P. 73–84.

5. Соловьева, А. А. Разработка уточненного р-блока как модели случайной величины в задачах анализа надежности строительных конструкций / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2022. – № 1 (300). – С. 20–28.

6. Massart, P. The tight constant in the Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz inequality / P. Massart // *The annals of Probability*. – 1990. – Vol. 18 (3). – P. 1269–1283.

A.A. Solovyova

Vologda State University

STUDY OF RANDOM VARIABLE MODEL IN THE FORM OF P-BOX

The article presents an experimental verification of a new model of a random variable in the form of p-box. The p-box represents two boundary cumulative distribution functions, inside of which there is a real, but unknown in advance, CDF, due to the epistemic uncertainty of the data (a small number of tests, low test accuracy etc.). The tensile tests of 50 control steel samples reflect the narrowing of the boundaries of the new p-box model based on the Dvoretzky – Kiefer – Wolfowitz (DKW) inequality and the possibility distribution functions, which avoids the hypothesis of a specific probability distribution in experimental studies.

Reliability, Dvoretzky – Kiefer – Wolfowitz (DKW) inequality, steel, median, random variable, uncertainty.