УДК 004.942:621.314



ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА: ПРОВЕРКА КОМПЬЮТЕРНЫМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ

В статье рассмотрен вывод передаточной функции электрического трансформатора. Проведено моделирование выходного напряжения трансформатора с использованием компьютерной модели в виде электрической схемы или в виде передаточной функции при одинаковых начальных условиях. Анализ результатов, полученных на разных моделях, показал различие обработки сигнала в высокочастотной области.

Электрический трансформатор, компьютерная модель, передаточная функция, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика.

Электрические трансформаторы являются весьма распространенными и важными элементами в электротехнических системах и комплексах, энергетике, автоматике. Эффективным инструментом исследования в названных областях является математическое моделирование, для которого требуется представление данных об объекте в специальных форматах. Например, для выбора типа регулятора в системе автоматического регулирования необходимо знать передаточную функцию (ПФ) объекта регулирования. В состав последнего может входить трансформатор. Поэтому целесообразно знать ПФ трансформатора. Для ее синтеза возьмем за основу уравнения математической модели однофазного двухобмоточного трансформатора [1, 2], считая, что полученные выводы будут справедливы для каждой фазы многофазных трансформаторов.

$$\begin{cases} u_1 - r_1 i_1 - L_{\sigma_1} \frac{di_1}{dt} = u_{\sigma_1}, \\ e_2 - r_2 i_2 = u_2 \end{cases}$$
(1)

где:

$$e_{1} = -\left(u_{01} + L_{\sigma 1}\frac{di_{1}}{dt}\right);$$
(2)
$$\left(w_{01} + L_{\sigma 1}\frac{di_{1}}{dt}\right)$$
(2)

$$e_{2} = \mp \left(\frac{w_{2}}{w_{1}}u_{01} + L_{\sigma 2}\frac{di_{2}}{dt}\right).$$
 (3)

ЭДС ветви намагничивания первичной обмотки u_{01} :

$$u_{01} = L_m \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{di_2}{dt} \right) + r_m \left(i_1 + \frac{w_2}{w_1} \cdot i_2 \right) = L_m \frac{di_\mu}{dt} + r_m i_\mu \cdot (4)$$

В правой части выражения (3) для группы соединения I/I-0 следует выбрать знак «+» (согласное включение индуктивностей), а для I/I-6 знак «-» (встречное включение). В выражениях (1)–(4) приняты следующие обозначения: u и e – напряжение и ЭДС, В; i – ток, А; L_{σ} и L_{m} – индуктивность рассеяния обмотки и полная индуктивность первичной об-

мотки от основного магнитного потока, Гн; r и r_m – активное сопротивление обмотки и потерь в стали, Ом; w – количество витков обмотки. Индексы 1 обозначают принадлежность к первичной обмотке трансформатора, а индексы 2 – к вторичной; индекс μ при токе означает принадлежность ветви намагничивания Т-образной схемы замещения (выражение (4) записано для случая последовательного соединения r_m и L_m). За малостью активной составляющей тока намагничивания трансформатора примем для дальнейших преобразований допущение $r_m = 0$.

Перепишем систему (1) с учетом (3) и (4) для группы соединения I/I-0:

$$\begin{cases} u_{1} - r_{1}\dot{i}_{1} - L_{\sigma_{1}}\frac{d\dot{i}_{1}}{dt} = L_{m}\left(\frac{d\dot{i}_{1}}{dt} + \frac{w_{2}}{w_{1}} \cdot \frac{d\dot{i}_{2}}{dt}\right) & . \quad (5) \\ \left(\frac{w_{2}}{w_{1}}L_{m}\left(\frac{d\dot{i}_{1}}{dt} + \frac{w_{2}}{w_{1}} \cdot \frac{d\dot{i}_{2}}{dt}\right) + L_{\sigma_{2}}\frac{d\dot{i}_{2}}{dt} - r_{2}\dot{i}_{2} = u_{2} \end{cases}$$

Введем для сокращения записи обозначения:

$$L_{1} = L_{m} + L_{\sigma 1};$$
(6)
$$L_{2} = \frac{w_{2}^{2}}{w_{1}^{2}} \cdot L_{m} + L_{\sigma 2}.$$
(7)

Используя (6) и (7), перепишем (5):

$$\begin{cases} u_{1} = r_{1}\dot{i}_{1} + L_{1}\frac{d\dot{i}_{1}}{dt} + \frac{w_{2}}{w_{1}} \cdot L_{m}\frac{d\dot{i}_{2}}{dt} & . \\ 0 = r_{2}\dot{i}_{2} - L_{2}\frac{d\dot{i}_{2}}{dt} - \frac{w_{2}}{w_{1}}L_{m}\frac{d\dot{i}_{1}}{dt} + u_{2} \end{cases}$$
(8)

Запишем (8) в операторной форме

$$\begin{cases} u_{1}(p) = r_{1}i_{1}(p) + L_{1}pi_{1}(p) + \frac{W_{2}}{W_{1}} \cdot L_{m}pi_{2}(p) & . \end{cases} (9) \\ 0 = r_{2}i_{2}(p) - L_{2}pi_{2}(p) - \frac{W_{2}}{W_{1}}L_{m}pi_{1}(p) + u_{2}(p) \end{cases}$$

Пусть нагрузка, подключенная к клеммам вторичной обмотки трансформатора, то есть под напряжение $u_2(p)$, представлена последовательным соединением $r_{\rm H}$ и $L_{\rm H}$. Тогда ток во вторичной обмотке может быть выражен как

$$i_2(p) = \frac{u_2(p)}{r_{\rm H} + L_{\rm H}p}.$$
 (10)

Перепишем второе уравнение системы (9) с учетом (10)

$$0 = \left(\frac{r_2}{r_{\rm H} + L_{\rm H}p} - \frac{L_2p}{r_{\rm H} + L_{\rm H}p} + 1\right)u_2(p) - \frac{w_2}{w_1}L_mpi_1(p).$$
(11)

Выразим $i_1(p)$ из первого уравнения системы (9) с учетом (10).

$$i_{1}(p) = \frac{u_{1}(p)}{r_{1} + L_{1}p} - \frac{\frac{W_{2}}{W_{1}} \cdot L_{m}pu_{2}(p)}{(r_{1} + L_{1}p)(r_{H} + L_{H}p)}.$$
 (12)

Перепишем (11) с учетом (12) и проведем некоторые преобразования:

$$u_{1}(p)\frac{w_{2}}{w_{1}} \cdot L_{m}p(r_{H} + L_{H}p) = u_{2}(p)\left\{r_{1}(r_{H} + r_{2}) + \left[r_{1}(L_{H} - L_{2}) + L_{1}(r_{H} + r_{2})\right]p + \left[L_{1}L_{H} - L_{1}L_{2} + \frac{w_{2}^{2}}{w_{1}^{2}} \cdot L_{m}^{2}\right]p^{2}\right\}.$$
(13)

Выразим из (13) ПФ трансформатора.

$$W(p) = \frac{u_{2}(p)}{u_{1}(p)} = \frac{\frac{w_{2}}{w_{1}} \cdot \frac{L_{m}r_{H}}{r_{1}(r_{H}+r_{2})} p\left(1 + \frac{L_{H}}{r_{H}}p\right)}{1 + \left(\frac{L_{H} - L_{2}}{r_{H}+r_{2}} + \frac{L_{1}}{r_{1}}\right) p + \left(\frac{L_{1}(L_{H} - L_{2}) + \frac{w_{2}^{2}}{w_{1}^{2}} \cdot L_{m}^{2}}{r_{1}(r_{H}+r_{2})}\right) p^{2}}, (14)$$

что можно записать в виде

$$W(p) = \frac{Ap + AT_{\rm H}p^2}{1 + Bp + Cp^2} = \frac{Ap(1 + T_{\rm H}p)}{1 + Bp + Cp^2},$$
(15)

где постоянная времени нагрузки

$$T_{\rm H} = \frac{L_{\rm H}}{r_{\rm H}} \,. \tag{16}$$

Введем специальный множитель G, отвечающий за принадлежность к одной из групп соединения обмоток. Пусть G = 1, если I/I-0, и G = -1, если I/I-6. Как показало компьютерное моделирование [2] в САПР *OrCAD* [3], ПФ трансформатора корректно учитывает группу соединения обмоток, если записать ее в виде:

$$W(p) = G \frac{Ap(1+T_{\rm H}p)}{1+Bp+Cp^2}.$$
 (17)

При этом в выражении (3) в правой его части всегда имеем в виду знак «+». Практически проверенное моделированием выражение (17) несколько отличается от аналитически выведенного аналогичного выражения, опубликованного в [1].

На рисунке 1 показана компьютерная модель однофазного трансформатора в САПР *OrCAD*, составленная в виде структурной схемы (блок *LAPLACE* с ПФ согласно (17) в развернутом виде).

На рисунке 2 показана компьютерная модель однофазного трансформатора в САПР *OrCAD* [3], составленная в виде электрической схемы [4], свернутой в иерархический блок [5].

На рисунке 3 показаны результаты моделирования ЛАЧХ для обоих типов компьютерной модели однофазного трансформатора (І/І-О или І/І-б) при одинаковых параметрах. Графики совпадают при низких и средних частотах, но имеют видимое различие в высокочастотной обрасти. Это различие сказывается на форме выходного напряжения, получаемого на разных типах моделей трансформатора, при полигармоническом входном напряжении (рис. 4–6).

s*{G*w02/w01*Lm*Rload/r1/(Rload+r2)}+s*s*{G*w02/w01*Lm*Lload/r1/(Rload+r2)}

 $\label{eq:parameters} \begin{array}{l} \mbox{PARAMETERS:} \\ \mbox{Lload} = \{0.2122m\} \\ \mbox{Rload} = \{1.6\} \\ \mbox{G} = \{1\} \\ \mbox{w01} = \{13\} \\ \mbox{w02} = \{17\} \\ \mbox{L1} = \{61.577u\} \\ \mbox{L2} = \{61.577u\} \\ \mbox{L2} = \{6.4m\} \\ \mbox{r2} = \{7.427m\} \\ \mbox{Lm} = \{0.0246308\} \end{array}$

 $1 + s^{((Lload+(w02^{w02}/w01/w01^{L}m+L2))/(Rload+r2)+(Lm+L1)r1)} + s^{(((Lm+L1)^{(Lload+(w02^{w02}/w01/w01^{L}m+L2))-w02^{w}w02/w01/w01^{L}m^{+}Lm)/r1)} + s^{((Lload+(w02^{w}w02/w01/w01^{L}m+L2))-w02^{w}w02/w01/w01^{L}m^{+}Lm)} + s^{((Lload+(w02^{w}w02/w01/w01^{L}m+L2))} + s^{(Lload+(w02^{w}w02/w01/w01^{L}m+L2)} + s^{(Lload+(w02^{w}w02/$

Рис. 1. Компьютерная модель однофазного трансформатора в САПР, составленная в виде структурной схемы







Рис. 2. Компьютерная модель однофазного трансформатора в САПР, составленная в виде электрической схемы. Слева показан иерархический блок, содержащий в себе схему трансформатора

0 יו

Lfa2l

A2

E1

Е



Рис. 3. Результаты моделирования ЛАЧХ для обоих типов компьютерной модели однофазного трансформатора (I/I-0 или I/I-6) при одинаковых параметрах. Графики совпадают при низких и средних частотах, но имеют видимое различие в высокочастотной обрасти



Рис. 4. Результаты моделирования напряжений трансформатора (I/I-0) в переходном режиме: 1 – входное напряжение; 2 – выходное напряжение на модели в виде электрической схемы; 3 – выходное напряжение на модели в виде структурной схемы



Рис. 5. Результаты компьютерного моделирования напряжений трансформатора (I/I-0) в установившемся режиме: 1 – входное напряжение; 2 – выходное напряжение на модели в виде электрической схемы; 3 – выходное напряжение на модели в виде структурной схемы



Рис. 6. Результаты компьютерного моделирования напряжений трансформатора (I/I-6) в установившемся режиме: 1 – входное напряжение; 2 – выходное напряжение на модели в виде электрической схемы; 3 – выходное напряжение на модели в виде структурной схемы



Рис. 7. Компьютерные модели Г-образного LC-фильтра (в виде электрической схемы и в виде структурной схемы) с учетом активных сопротивлений элементов, нагруженных на активно-индуктивное сопротивление



Рис. 8. Результаты моделирования ЛАЧХ для обоих типов компьютерной модели Г-образного LC-фильтра при одинаковых параметрах. Графики совпадают во всем диапазоне частот



Рис. 9. Результаты моделирования реакции Г-образного LC-фильтра на входной сигнал типа «скачек» величиной 1 В: 1 – инвертированный по знаку сигнал напряжения на нагрузке для модели в виде электрической схемы; 2 – сигнал напряжения на нагрузке для модели в виде структурной схемы

При полигармоническом входном напряжении низкочастотная форма огибающей выходного напряжения идентична для обеих моделей трансформатора. Но ввиду наличия в спектре выходного напряжения высокочастотных компонентов, форма выходного напряжения отличается для разных типов моделей. Принимая во внимание форму входного напряжения, форма графика 2 на рисунке 6 (выходное напряжение на модели в виде электрической схемы) представляется более реалистичной.

Отметим, что столь явные отличия в результатах моделирования по электрическим и структурным схемам устройств не являются обязательными. Можно привести пример моделирования Г-образного *LC*-фильтра (в виде электрической схемы и в виде структурной схемы) с учетом активных сопротивлений элементов, нагруженного на активно-индуктивное сопротивление [6] (рис. 7–9). Можно констатировать практически полную идентичность результатов моделирования по двум типам моделей Г-образного *LC*-фильтра.

Таким образом, проверка математических выкладок на компьютерной модели является весьма полезным и малозатратным способом установления адекватности разрабатываемой математической модели. Нужно также принимать во внимание, что выбор тех или иных инструментов моделирования может оказывать влияние на конечный результат. Поэтому исследователю необходимо иметь представление о возможном характере ожидаемых результатов, а лучше – опытные данные, с которыми можно сравнить результат моделирования.

Литература

1. Пустоветов, М. Ю. Передаточная функция трансформатора / М. Ю. Пустоветов // Страна живет,

пока работают заводы : материалы Международной научно-технической конференции / Юго-Западный государственный университет. – Курск, 2015. – С. 296–299.

2. Pustovetov, M. Loaded by RL-Branch EMC Filter on the Output of the Inverter Transfer Function Taking into Account Resistances and Electric Transformer's Transfer Function Derivation / M. Pustovetov. – DOI: 10.55708/js0105011 // Journal of Engineering Research and Sciences. – 2022. – Vol. 1, № 5. – P. 102–108.

3. Кеоун, Дж. Электронное моделирование в OrCAD (+DVD) / Дж. Кеоун. – Москва : ДМК Пресс, 2010. – 628 с.

4. Пустоветов, М. Ю. Использование компьютерной модели однофазного трансформатора с дополнительным выводом в средней точке вторичной обмотки для исследования системы стабилизации тока в обмотке возбуждения тягового электродвигателя / М. Ю. Пустоветов // Известия Транссиба. – 2014. – № 3 (19). – С. 84–88.

5. Разевиг, В. Д. Система проектирования цифровых устройств OrCAD / В. Д. Разевиг. – Москва : Солон-Р, 2000. – 160 с.

6. Пустоветов, М. Ю. Передаточная функция выходного фильтра электромагнитной совместимости инвертора с учетом активных сопротивлений ветвей и индуктивности нагрузки / М. Ю. Пустоветов // Эффективное и качественное снабжение и использование электроэнергии : сборник докладов 5 международной научно-практической конференции в рамках специализированного форума «Ехро Build Russia». – Екатеринбург : Издательство УМЦ УПИ, 2016. – С. 199–201.

M.Yu. Pustovetov Technological Institute (Branch) of DSTU in the City of Azov

ELECTRICAL TRANSFORMER TRANSFER FUNCTION: COMPUTER SIMULATION VERIFICATION

The article considers the derivation of the transfer function of an electrical transformer. The output voltage of the transformer was simulated using a computer model in the form of an electrical circuit or in the form of a transfer function under the same initial conditions. An analysis of the results obtained on different models showed a difference in signal processing at high frequencies.

Transfer function, active-inductive load, transformer, simulation, Bode diagram.