



КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА СТАБИЛИЗИРОВАННОГО РОТАТОРА

В статье показаны математические зависимости, описывающие кинематику и динамику стабилизированного ротатора. Доказывается, что при изменении момента импульса стабилизированного ротатора изменяется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной). Установлены особенности стабилизированного ротатора, а именно: идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергий и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Ротатор, маятник, частота, стабилизация, выбег, энергия, момент импульса, циклотронное движение.

Частота вращения многих электрических машин постоянного тока, тепловых машин, накопителей кинетической энергии и т.п. существенно зависит от нагрузки, ее поддержание на заданном уровне обеспечивается внешними регулирующими устройствами, но для более точной регулировки частоты вращения используют кинематические демпферы – стабилизированные ротаторы. В таких устройствах используется принцип стабилизации кинетической энергии как функции двух взаимовлияющих переменных: частоты вращения и момента инерции. Сам ротатор, раскрученный до заданной частоты, также может поддерживать скорость вращения вала автономно за счет накопленной кинетической энергии.

В отличие от большинства стабилизаторов вращения, использующих следящие схемы для удержания частоты вращения в заданном диапазоне [1–4],

стабилизированный ротатор имеет *фиксированную собственную частоту вращения*, формула которой совпадает с формулой частоты свободных колебаний пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1)$$

На рисунке показана схема стабилизированного ротатора. На валу, связанном с источником механической энергии и рабочим органом, установлен корпус, в котором с помощью упругих элементов закреплены грузы. При вращении ротора под действием центробежной силы грузы перемещаются от центра. Поэтому с увеличением момента импульса возрастает момент инерции механизма таким образом, что угловая скорость остается неизменной.

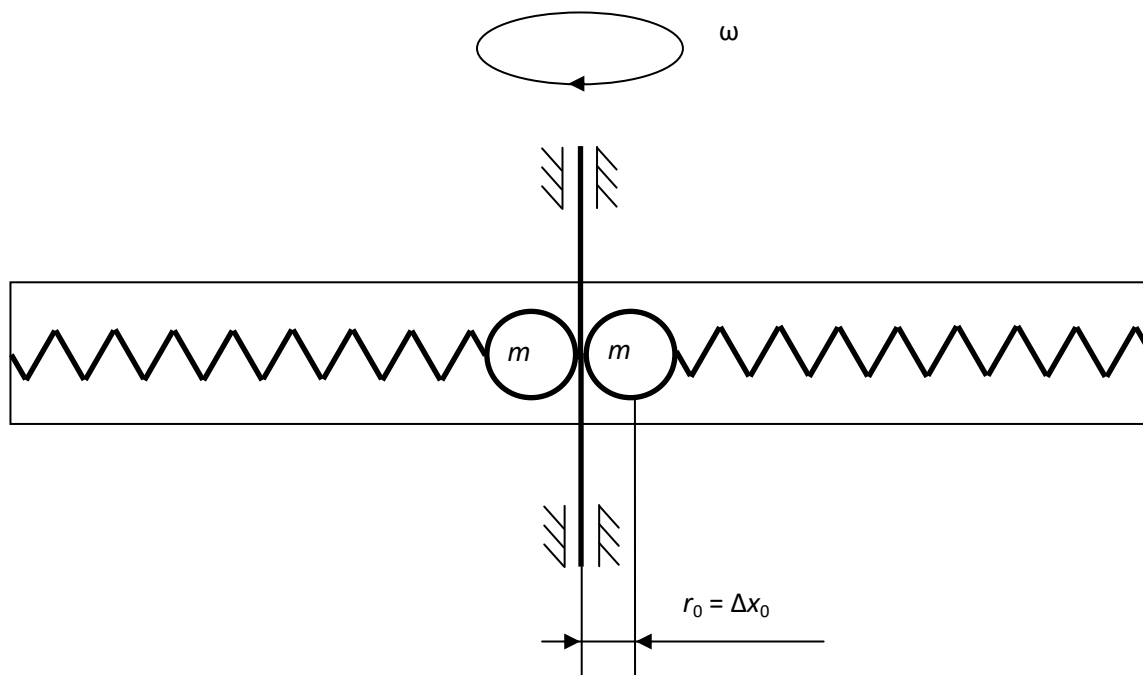


Рис. Стабилизированный ротатор

Проектирование устройств со стабилизированным ротором сопряжено с необходимостью проведения расчетов. Ниже представлено аналитическое описание кинематики и динамики стабилизированного ротора, которое может быть частью таких расчетов.

Кинематика стабилизированного ротора

Момент импульса стабилизированного ротора равен

$$L = J\omega_0 = mr^2\omega_0 = mr^2\sqrt{\frac{k}{m}} = r^2\sqrt{mk}.$$

Здесь J – момент инерции, $x_\omega = \sqrt{mk}$ – волновой реактанс [5–8].

$$r = \frac{v}{\omega_0}.$$

$$L = r^2 x_\omega = \frac{v^2}{\omega_0^2} x_\omega = v^2 \frac{m}{k} \sqrt{mk} = \frac{m}{\omega_0} v^2.$$

При изменении момента импульса изменяется радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной).

Положению груза, при котором его центр масс совпадает с осью вращения, соответствует состояние неопределенного равновесия. При вращении груз равновероятно может отклониться в любую из двух сторон и, соответственно, может развиваться как сжатие, так и растяжение пружины.

Состояние неопределенного равновесия можно исключить, обеспечив начальное (статическое) смещение груза r_0 и равную ему начальную деформацию пружины.

Динамика стабилизированного ротора

При раскручивании преднатяженного ротора до частоты ω_0 центробежная сила $m\omega^2 r$ меньше силы начальной деформации пружины kr_0 , поэтому радиус r_0 не изменяется. Это участок линейной динамики $[0, \omega_0]$.

$$r = r_0, \quad \omega = \frac{M}{mr_0^2} t.$$

За время t_0 при постоянном вращающем моменте M ротор достигнет частоты вращения ω_0 .

$$t_0 = \frac{\omega_0 mr_0^2}{M} = \frac{\sqrt{mkr_0^2}}{M} = \frac{L_0}{M}.$$

При дальнейшем нагружении стабилизированного ротора вращающим моментом его динамика (нелинейный участок) описывается системой двух дифференциальных уравнений – вращательного и поступательного (радиального)

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{J} = \frac{M}{mr^2} \\ m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{mv^2}{r} - kr = \frac{m\omega^2 r^2}{r} - kr = (m\omega^2 - k)r \end{cases}.$$

Трение здесь не учитывается.

Начальные условия:

$$\omega|_{t=t_0} = \omega_0, \quad r|_{t=t_0} = r_0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Из системы уравнений и начальных условий следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=t_0} &= \frac{M}{mr_0^2} \\ \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=t_0} &= 2 \frac{M}{mr^3} \frac{dr}{dt}, \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0. \\ \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{t=t_0} &= (\omega^2 - \omega_0^2)r, \quad \left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{t=t_0} = 0. \\ \left. \frac{d^3 r}{dt^3} \right|_{t=t_0} &= 2\omega \frac{d\omega}{dt} r + (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{dr}{dt}, \\ \left. \frac{d^3 r}{dt^3} \right|_{t=t_0} &= 2\omega_0 \frac{M}{mr_0^2} r_0 = 2\omega_0 \frac{M}{mr_0}. \\ \left. \frac{d^3\omega}{dt^3} \right|_{t=t_0} &= 6 \frac{M}{mr^4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2 \frac{M}{mr^3} \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad \left. \frac{d^3\omega}{dt^3} \right|_{t=t_0} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4\omega}{dt^4} \right|_{t=t_0} &= -2 \frac{4M}{m^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^3 + 6 \frac{M}{m^2} 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + \\ &+ 6 \frac{M}{m^4} \frac{d}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} - 2 \frac{M}{m^3} \frac{d^3 r}{dt^3}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^4\omega}{dt^4} \right|_{t=t_0} = -2 \frac{M}{mr_0^3} 2\omega_0 \frac{M}{mr_0} = -4\omega_0 \frac{M^2}{m^2 r_0^4}.$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 r}{dt^4} \right|_{t=t_0} &= 2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 r + 2\omega \frac{d^2\omega}{dt^2} r + 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt} + \\ &+ 2\omega \frac{d\omega}{dt} \frac{dr}{dt} + (\omega^2 - \omega_0^2) \frac{d^2 r}{dt^2}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d^4 r}{dt^4} \right|_{t=t_0} = 2 \left(\frac{M}{mr_0^2} \right)^2 r_0 = \frac{2M^2}{m^2 r_0^3}.$$

Таким образом, частота вращения стабилизированного ротора и радиус представимы в виде:

$$\begin{aligned} \omega &\approx \frac{1}{0!} \omega(0)t^0 + \frac{1}{1!} \frac{d\omega}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!} \frac{d^2\omega}{dt^2}(0)t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3\omega}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4\omega}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2} t + \frac{1}{2!} 0t^2 + \frac{1}{3!} 0t^3 - \frac{1}{4!} 4\omega_0 \frac{M^2}{m^2 r_0^4} t^4 + \dots = \\ &= \omega_0 + \frac{M}{mr_0^2} t - \frac{\omega_0 M^2}{6m^2 r_0^4} t^4 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{1}{0!} r(0)t^0 + \frac{1}{1!} \frac{dr}{dt}(0)t^1 + \frac{1}{2!} \frac{d^2 r}{dt^2}(0)t^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3 r}{dt^3}(0)t^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4 r}{dt^4}(0)t^4 + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_0 + 0t + \frac{1}{2!} 0t^2 + \frac{1}{3!} 2\omega_0 \frac{M}{mr_0} t^3 + \frac{1}{4!} \frac{2M^2}{m^2 r_0^3} t^4 + \dots = \\
&= r_0 + \frac{\omega_0 M}{3mr_0} t^3 + \frac{M^2}{12m^2 r_0^3} t^4 + \dots \quad (3)
\end{aligned}$$

Вопрос о сходимости рядов здесь не рассматривается.

Смысл последних двух уравнений состоит в иллюстрации нелинейности динамики стабилизированного ротатора при нагружении его постоянным вращающим (тормозящим) моментом.

Подобно тому, как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой, частота вращения стабилизированного ротатора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения.

Из (2) следует, что чем меньше момент M и больше m и r_0 , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Нестационарный режим стабилизированного ротатора

Стабилизированный ротатор может быть представлен суперпозицией двух ортогональных пружинных маятников в соответствии с формулой

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}r \cos \varphi(t) + \mathbf{j}r \sin \varphi(t).$$

Это дает возможность использовать хрестоматийные решения для вынужденных колебаний маятника при описании нестационарного режима стабилизированного ротатора, а именно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) = & \mathbf{i} \left[r_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \right. \\
& \left. + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos \left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right) \right] + \\
& \mathbf{j} \left[r_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \right. \\
& \left. + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Здесь r_0 – начальный радиус, $\delta = R/(2m)$ – коэффициент затухания, R – коэффициент сопротивления, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$, φ_1 – начальная фаза, ω – частота вынужденных колебаний, $x_0 = F/(2m)$, F – возмущающая сила.

По мере затухания собственных колебаний стабилизированный ротатор будет вращаться с циклической частотой ω , а его радиус примет значение

$$r = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{2mF}{R\sqrt{R^2 + 16m^2 \omega^2}}.$$

При $\omega_1^2 \leq 0$ происходит аperiodическое затухание.

Второе замечательное свойство стабилизированного ротатора

(Первым является фиксированная собственная частота вращения (1) и ее совпадение с собственной частотой колебаний маятника).

При *вынужденном* вращении стабилизированного ротатора с постоянной частотой

$$\Omega = a\Omega_0$$

(a – безразмерный коэффициент) его радиальная динамика определяется уравнением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r = (a^2 \omega_0^2 - \omega_0^2) r = -(1 - a^2) \omega_0^2 r.$$

В зависимости от значения a возможны три варианта.

1. При $a < 1$ имеет место дифференциальное уравнение свободных гармонических незатухающих колебаний с собственной частотой

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}.$$

Таким образом, стабилизированный ротатор доставляет возможность управлять собственной частотой колебаний радиального осциллятора.

2. При $a = 1$ $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, $\frac{dr}{dt} = V = \text{const}$, $r = r_{01} + Vt$.

Колебания не происходят.

3. При $a > 1$ $\frac{d^2 r}{dt^2} = (a^2 - 1)\omega_0^2 r$, $r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1})t}$

Колебания не происходят.

Затухание колебаний в стабилизированном ротаторе принципиально не отличается от затухания в обычных колебательных системах.

Выбег ротатора в стабилизированном режиме

Минимальная полная энергия стабилизированного ротатора в стабилизированном режиме соответствует статическому смещению груза r_0 .

$$W_0 = K_0 + U_0 = 2K_0 = 2U_0 = kr_0^2.$$

Максимальная полная энергия теоретически не ограничена, а практически определяется конструктивно установленным максимальным радиусом r_m .

$$W_m = kr_m^2.$$

Пусть средняя за выбег мощность диссипативных потерь равна P .

Тогда время выбега составит

$$\tau = \frac{W_m - W_0}{P} = k \frac{r_m^2 - r_0^2}{P}.$$

Очевидно, что чем меньше P , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Заключение

Представленный стабилизированный ротатор обладает фиксированной частотой вращения, не зависящей от момента импульса и момента инерции.

Это означает, что так же, как и при циклотронном движении [9, 10], при нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизи-

рованного ротатора не может быть произвольной и принимает единственное значение.

Другими особенностями стабилизированного ротатора являются идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергий и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Стабилизированный ротатор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, хотя в этом качестве он может иметь сильную конкуренцию со стороны мехатронных систем.

Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

Литература

1. Динамическая стабилизация вращения круга внутришлифовального станка / В. А. Гречишников, Е. С. Антипина, С. Н. Жилин [и др.] // Вестник МГТУ «Станкин». – 2016. – № 2 (37). – С. 8–12.
2. Распопов, В. Я. Индикаторные гиросtabilизаторы / В. Я. Распопов. – DOI: 10.14489/hb.supr.2016.11.pp.001-020 // Справочник. Инженерный журнал. – 2016. – № 11. – С. 1–20.
3. Попов, И. П. Применение искусственной массы для балансировки механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2021. – № 1 (11). – С. 19–21.
4. Попов, И. П. Наложение вращений в механизмах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 4 (10). – С. 19–23.
5. Попов, И. П. Механические реактансы при гармонических колебаниях исполнительных органов машин и механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2021. – № 4 (14). – С. 65–67.
6. Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности виброприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.
7. Попов, И. П. Механическая реактивная инерционная мощность в механических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2021. – № 3 (13). – С. 63–65.
8. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
9. Павлов, В. Д. Теоремы об излучении заряда / В. Д. Павлов. – DOI: 10.25791/infizik.6.2021.1213 // Инженерная физика. – 2021. – № 6. – С. 37–40.
10. Павлов, В. Д. Энергетика излучения электрического заряда и ее следствия / В. Д. Павлов. – DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-4-5-8 // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2021. – № 4. – С. 5–8.

I.P. Popov
Kurgan State University

KINEMATICS AND DYNAMICS OF STABILIZED ROTATOR

The article shows mathematical dependencies describing the kinematics and dynamics of a stabilized rotator. It is proved that when the angular momentum of a stabilized rotator changes, the radius and tangential velocity change (the rotational frequency does not change and is equal to its own). The features of a stabilized rotator are established, namely: the identity of the formula for the frequency of rotation to the formula for the frequency of a spring pendulum, the equality of kinetic and potential energies, and the resulting equality of the radius of rotation of the load to the value of the deformation of the spring.

Rotator, pendulum, frequency, stabilization, run-out, energy, angular momentum, cyclotron motion.