



## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВОДОПРОВОДНЫХ СЕТЯХ С РЕГУЛЯТОРАМИ РАСХОДА И НАПОРА

Предложена методика расчета потокораспределения на водопроводных сетях с регуляторами постоянного давления и расхода. Проверена работоспособность метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений нестандартной структуры для моделирования сети с регуляторами. Приведен пример расчета по предложенной методике.

Методика, потокораспределение, гидравлический расчет, водопроводная сеть, регулятор.

Инженерные водопроводные сети населенных мест и промышленных объектов предназначены для транспортирования питьевой или технической воды от ее источников до водопотребителей. Водопроводные сети объединяют другие части системы водоснабжения (станции водоподготовки, насосные станции, водозаборы, скважины, водонапорные башни и т.д.) в единый комплекс.

Составными элементами водопроводных сетей являются подземные напорные трубопроводы, колодцы – узлы их соединения, а также запорно-регулирующая арматура (затвора, вентили, гидранты, обратные клапаны и др.). Для проектирования городских водопроводных сетей, а также при их дальнейшей эксплуатации важнейшей задачей является расчетное моделирование их работы при различных режимах суточного водопотребления. Проведение инженерных расчетов в ходе разработки проектно-сметной документации необходимо для выбора оптимальных параметров труб, оборудования и сооружений. Инженерные гидравлические расчеты включают прежде всего моделирование гидродинамики течения воды в трубопроводных системах, которое в данном случае называется *задачей потокораспределения*. В ходе решения такой задачи производятся гидравлические расчеты таких параметров, как расходы, давления, скорости течения на ветвях трубопроводов, при некоторых заданных условиях и ограничениях.

Типичным условием при решении задачи потокораспределения является обеспечение у потребителя заданного расхода и давления (напора) воды. Помимо этого, существуют ограничения на ряд технических параметров, например определенный сортамент диаметров труб, минимальные и максимальные давления, диапазоны скорости течения в трубах и т.д.

Методика проведения гидравлических расчетов предполагает составление упрощенной расчетной схемы (модели) водопроводной сети и проведение на ней численного эксперимента. Расчетная модель представляет собой сочетание элементов, модели-

рующих реальные объекты водопровода: узловых колодцев, трубопроводных участков, насосных станций, источников воды, резервуаров, регуляторов, потребителей и др. На основе модели формируется система нелинейных алгебраических уравнений, связывающих по двум законам Кирхгофа давления в узлах, скорости течения и потери напора в трубопроводах [1].

На практике часто возникает необходимость фиксирования или ограничения значений отдельных параметров (например, расходов на участках, давлений в узлах и у потребителей, или же перепадов давлений). Это делается при помощи установки автоматически действующих устройств, т.н. *регуляторов*. Введение регуляторов значительно усложняет как саму модель водопроводной сети, так и итерационное решение системы моделирующих уравнений.

Целью настоящей работы является усовершенствование компьютерного решения задачи потокораспределения в сетях с регуляторами двух типов – расхода (РР) и давления (РД), апробация этого способа и проверка работоспособности метода Ньютона при решении системы уравнений нестандартной структуры.

**Модели и системы уравнений.** Принятая модель водопроводных сетей состоит из элементов трех основных типов:

- *пассивные* – участки трубопровода, местные сопротивления;
- *активные* – насосные агрегаты и станции;
- *регулирующие* – запорно-регулирующая арматура, регуляторы.

Для каждого типа элемента существует своя математическая модель, выражающая связь потерь напора (или давления) и расхода жидкости. Топология графа сети выражается матрицей инцидентности  $A$ , которая имеет размер  $(m - 1) \times n$ , в которой  $m$  – число узлов,  $n$  – число участков (ветвей), соединяющих узлы. Каждый элемент матрицы принимает значение 0, 1 или -1.

Традиционная модель установившегося потокораспределения, характерного для водопроводных се-

тей, включает известные законы Кирхгофа и замыкающие соотношения [2]. В матрично-векторном виде уравнения записываются как система:

$$\begin{aligned} Ax &= Q; \\ A^T P &= y; \\ y &= f(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A$  – матрица инцидентности узлов и участков расчетной схемы с элементами  $a_{ji} = 1(-1)$ , если узел  $j$  является начальным (конечным) для участка  $i$ , и  $a_{ji} = 0$ , если ветвь  $i$  не инцидентна узлу  $j$ ;  $x, y$  –  $n$ -мерные векторы расходов и перепадов напора (давления) на участках расчетной схемы;  $f(x)$  –  $n$ -мерная вектор-функция с элементами  $f_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , отражающими законы падения давления от расхода на участках;  $Q$  –  $(m-1)$ -мерный вектор узловых расходов с элементами  $Q_j > 0$  для притока в узел  $j$ ,  $Q_j < 0$  для отбора в узле  $j$  и  $Q_j = 0$ , если узел  $j$  – простая точка соединения участков;  $P$  –  $(m-1)$ -мерный вектор узловых давлений.

Первые два уравнения представляют реализацию законов Кирхгофа, третье – замыкания. Задача состоит в определении векторов  $x, y, P$  при заданных матрице инцидентности  $A$ , векторе  $Q$ , известном виде  $f_i(x_i)$ , для  $i = \overline{1, n}$  и заданном давлении в одном из узлов ( $P_m$ ).

Пассивные элементы моделируются общим уравнением:

$$f_i(x_i) = s_i(x_i)x_i|x_i|, \quad (2)$$

где  $s_i$  – гидравлическое сопротивление участка (функция от расхода  $x_i$ ).

Активные элементы в общем случае задаются алгебраическими полиномами вида:

$$f_i(x_i) = \sum_{q=0}^{K_i} a_{q,i} |x_i|^{b_{q,i}-1} x_i, \quad (3)$$

где  $a_{q,i}$  и  $b_{q,i}$  – коэффициенты полинома;  $K_i$  – степень полинома.

Известны многочисленные методы и алгоритмы решения данной задачи, однако, как показано в монографии [3], базовыми являются два метода: *контурных расходов* и *узловых давлений*. Оба основаны на методе Ньютона, но с предварительным понижением порядка линеаризованных систем уравнений (1).

Регуляторы представляют собой местные гидравлические сопротивления на участках, величины которых изначально неизвестны и определяются в ходе решения системы уравнений (1). При этом должно быть обеспечено соблюдение условий заданного расхода воды на участке или пьезометрического давления в узле, который располагается до или после регулятора. Такие элементы принято моделировать через потери энергии (напора) формулой Вейсбаха:

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}, \quad (4)$$

где  $v$  – средняя скорость потока в его сечении за (после) регулятором;  $\zeta_m$  – коэффициент местного сопротивления.

Фактически роль регуляторов сводится к тому, чтобы изменять гидравлические сопротивления уча-

стков  $s$  в зависимости от расхода  $x$  и перепада давления  $y$ , добавляя дополнительное неизвестное значение  $h_m$ , которое и требуется рассчитать.

Общий подход расчета таких сетей, описанный в [3], заключается в последовательной корректировке всех переменных параметров с помощью двойных циклов итераций: *внешнего* и *внутреннего*.

Внешний цикл заключается в определении очередного приближения для вектора узловых давлений  $P$  и подсчете новых значений всех переменных параметров ( $s, h_m, Q$ ), включая выполнение заданных условий и определение режима работы регулирующих устройств. На внутреннем цикле производится определение расходов  $x$  и потерь напора  $y$  на участках всей схемы, при условии соблюдения законов Кирхгофа – т.н. *увязка сети*.

Недостатком такого подхода является чрезмерно большое число циклов итераций для обеспечения требуемой погрешности при увязке участковых расходов. В работе [3] предложен способ, который позволяет отказаться от внешнего цикла, однако он рассмотрен для вентиляционных систем и не учитывает специфику водопроводных сетей. В данной работе предлагается усовершенствованная методика, которая апробирована и реализована в виде онлайн-приложения.

**Методы и материалы.** Разработка, отладка и исследование работоспособности методики проводились с использованием скриптового языка Perl на веб-сервере.

**Методика расчета потокораспределения.** Определяющими условиями, которые были положены в основу предлагаемой методики, является обеспечение:

- заданного расхода на участке, на котором расположен РР;
- заданного давления (напора) в узле начала или конца участка, на котором расположен РД;
- необходимого минимального свободного напора (пьезометрического давления) у потребителей.

Базовая методика решения задачи потокораспределения включает следующие этапы:

1. В узле начала каждого участка с РР назначается дополнительный отбор, равный заданному регулятором расходу, в узле конца этого участка отбор, наоборот, уменьшается на такую же величину.

2. Расходы на участках с РР зафиксированы и не являются переменными величинами, поэтому из графа водопроводной сети эти участки необходимо временно исключить. В дальнейших расчетах этот прием существенно упрощает систему уравнений (1) и уменьшает ее размерность.

3. Анализом графа водопроводной сети определяются замкнутые контуры, а также участки, в них не входящие. Составляется матрица инцидентности сети.

4. Выполняется начальное потокораспределение (определение участковых расходов в первом приближении) с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), составленной из уравнений баланса расходов в узлах и баланса линеаризованных потерь напора в контурах. Потери напора в этом случае определяются по формуле:

$$y_i(x_i) = s_i(x_i)x_i. \quad (5)$$

5. Согласно уравнениям (2) и (3) на каждом участке определяются потери напора, которые складываются из потерь по длине и на местных сопротивлениях. Если в сети имеются замкнутые контуры, составляется система уравнений, состоящая из  $m-1$  линейных уравнений баланса расходов в узлах и  $k$  нелинейных уравнений баланса потерь напора в контурах. Данная система решается итерационным методом Ньютона, согласно которому вычисляются поправки к участковым расходам до тех пор, пока не будет обеспечено условие сходимости по допустимой погрешности потерь напора.

6. Определяются свободные напоры (давления) в каждом узле и на источниках, исходя из условия обеспечения необходимого напора у каждого потребителя.

7. Определяется удельное гидравлическое сопротивление, скорость течения и потери напора по длине в трубопроводах участков с РР, которые были исключены ранее из матрицы инцидентности. Расчет потерь напора  $\Delta P^{PP}$  на РР производится по формуле:

$$\Delta P^{PP} = (P_{нач} + Z_{нач}) - (P_{кон} + Z_{кон}) - (\Delta h_l + \Delta h_m), \quad (6)$$

где  $P_{нач}$  и  $P_{кон}$  – свободный напор в узлах начала и конца участка;  $Z_{нач}$  и  $Z_{кон}$  – геодезические отметки поверхности земли в этих узлах;  $\Delta h_l$  и  $\Delta h_m$  – потери напора по длине и местных сопротивлениях участка.

8. Для дальнейших расчетов РД находится узел с минимальным свободным напором – *диктующая точка*. Затем обходом графа сети определяются цепочки участков (обязательно вне РД) от диктующей точки до узлов с фиксированным напором. Такие цепочки будем называть *пути*, количеством  $p$ .

Для расчетов РД составляется модифицированная матрица инцидентности, в которой:

- ячейки в первых  $m-1$  строках кодируют баланс расходов узлах;
- следующие  $k-p$  строк соответствуют уравнениям баланса потерь напора в контурах;
- последние  $p$  строк ячеек кодируют модифицированные уравнения баланса потерь напора по пути от диктующей точки до узла начала (или конца) участка с РД;
- ячейки матрицы в этом случае заполняются таким же методом, как для контуров, отрицательные значения принимаются, если направление потока на

участке противоположно направлению от диктующей точки до узла с фиксированным напором.

На базе этой матрицы составляется и решается новая система нелинейных уравнений инцидентности, в правой части которой для последних  $p$  уравнений записывается разность между свободным напором в диктующей точке и напором, заданным РД. Таким образом, находятся участковые расходы и потери напора.

9. Для расчета потерь напора на РД составляется и решается СЛАУ баланса суммы потерь напора на участках пути по общей формуле:

$$\Sigma \Delta P^{PD} = (P_{рез} + Z_{рез}) - (P_{дукт} + Z_{дукт}) - \Sigma \Delta h^{рез-0}, \quad (7)$$

где  $\Sigma \Delta P^{PD}$  – сумма потерь напора на участках пути от узла с фиксированным напором до диктующей точки, который проходит через РД;  $\Sigma \Delta h^{рез-0}$  – сумма потерь напора на участках этого же пути, но проходящего вне РД;  $P_{рез}$  и  $P_{дукт}$  – свободные напоры в узле с фиксированным напором и диктующей точке;  $Z_{рез}$  и  $Z_{дукт}$  – соответствующие геодезические отметки этих узлов.

**Пример потокораспределения.** Рассмотрим схему водопроводной сети, которая представлена на рисунке 1. На схеме 5 узлов, 6 участков, 2 контура, один потребитель **ВП** с фиксированным отбором и источник – насосная станция **НС**. Отбор в узле 3 составляет 100 л/с, необходимый свободный напор – 10 м. Все участки имеют длину 100 м, трубы – полимерные, номинальным диаметром 110 мм. Регулятор **РР** фиксирует на участке (2–5) расход 15 л/с, регулятор **РД** поддерживает напор в узле 1, равный 50 м. Геодезические отметки всех узлов одинаковы. Требуется определить распределение расходов по участкам, потери напора на каждом регуляторе и напоры в каждом узле. Допустимая погрешность суммы потерь напора в контурах – 0,1 м.

Участок с РР (2–5) временно исключается из расчетной схемы, поэтому в узле 2 назначается временный отбор 15 л/с, в узле 5 добавляем источник с таким же расходом – на рисунке 2. На участках назначаются первоначальные направления движения воды: (1 → 2), (4 → 3), (1 → 4), (1 → 3), (5 → 3). После исключения участка с РР в схеме остается замкнутый контур 1: (1 – 4 – 3 – 1).

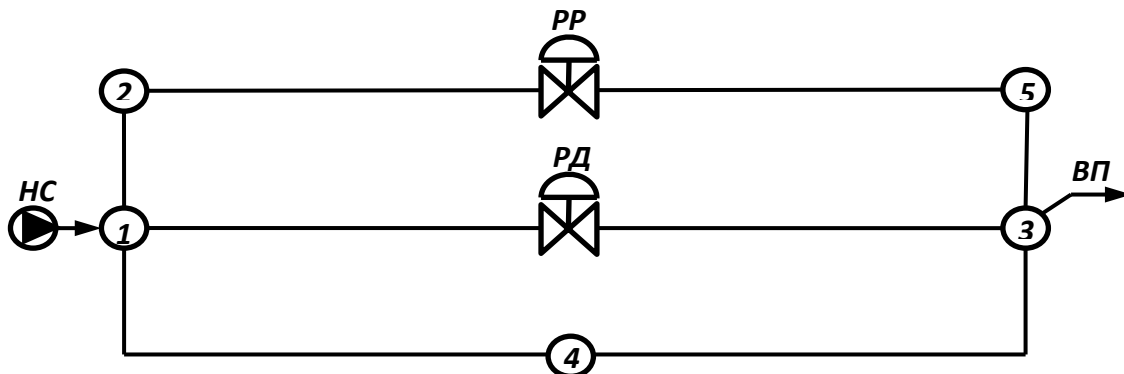


Рис. 1. Схема водопроводной сети:  
НС – насосная станция, ВП – водопотребитель, 1...5 – узлы соединения участков

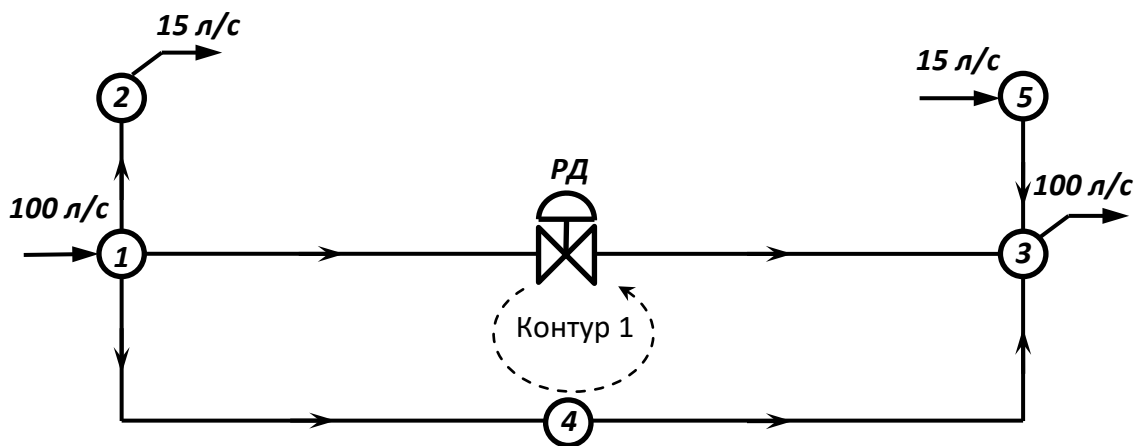


Рис. 2. Модификация расчетной схемы

Таблица 1

**Матрица инцидентности А**

| № элемента |     | Участки |         |         |         |         |
|------------|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
|            |     | (1 → 2) | (4 → 3) | (1 → 4) | (1 → 3) | (5 → 3) |
| Узлы       | 1   | -1      | 0       | -1      | -1      | 0       |
|            | 2   | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |
|            | 3   | 0       | 1       | 0       | 1       | 1       |
|            | 4   | 0       | -1      | 1       | 0       | 0       |
| Контур     | № 1 | 0       | 258,92  | 258,92  | -258,92 | 0       |

Таблица 2

**Участковые расходы, потери напора и скорости на участках**

| Участок | Расход, л/с                    |                 |                        | Итог расчета |                  |               |
|---------|--------------------------------|-----------------|------------------------|--------------|------------------|---------------|
|         | Начальное потоко-распределение | Первая итерация | При допустимой невязке | Расход, л/с  | Потери напора, м | Скорость, м/с |
| 1       | 2                              | 3               | 4                      | 5            | 6                | 7             |
| 1 → 2   | 15                             | 15              | 15                     | 15           | 4,241            | 2,04          |
| 4 → 3   | 28,33                          | 33,76           | 34,29                  | 35,97        | 20,01            | 4,89          |
| 1 → 4   | 28,33                          | 33,76           | 34,29                  | 35,97        | 20,01            | 4,89          |
| 1 → 3   | 56,67                          | 51,24           | 50,71                  | 49,03        | 34,67            | 6,66          |
| 5 → 3   | 15                             | 15              | 15                     | 15           | 4,241            | 2,04          |
| 2 → 5   | -                              | -               | -                      | 15           | 4,241            | 2,04          |

Составляется квадратная матрица соединений участков сети и узлов (инцидентности) А (табл. 1). Ячейки матрицы для контура 1 заполняются коэффициентами гидравлического сопротивления  $s_i$  (зависит от материала, диаметра, длины трубопровода и скорости течения [4]), рассчитанных при первоначальном значении скорости, равном 0,5 м/с. Если направление течения воды на участке не совпадает с направлением условного обхода контура на рисунке 2, коэффициент  $s_i$  принимается со знаком «минус».

Составленная по матрице А СЛАУ баланса расходов в узлах и линеаризованных потерь напора в контурах представлена ниже:

$$\begin{aligned}
 -q_{1 \rightarrow 2} - q_{1 \rightarrow 4} - q_{1 \rightarrow 3} &= -0,1 \\
 q_{1 \rightarrow 2} &= 0,015 \\
 q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 3} + q_{5 \rightarrow 3} &= 0,1 \\
 -q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 4} &= 0 \\
 258,92 \cdot q_{4 \rightarrow 3} + 258,92 \cdot q_{1 \rightarrow 4} - 258,92 \cdot q_{1 \rightarrow 3} &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

После ее решения находятся участковые расходы  $q_i$ , которые приведены в таблице 2, столбец 2.

При найденных расходах снова определяются коэффициенты  $s_i$ , которые подставляются в последнюю строку системы (8) нелинейных уравнений (1) и (2) на базе матрицы А:

$$\begin{aligned}
 -q_{1 \rightarrow 2} - q_{1 \rightarrow 4} - q_{1 \rightarrow 3} &= -0,1 \\
 q_{1 \rightarrow 2} &= 0,015 \\
 q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 3} + q_{5 \rightarrow 3} &= 0,1 \\
 -q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 4} &= 0 \\
 16320 \cdot q_{4 \rightarrow 3}^2 + 16320 \cdot q_{1 \rightarrow 4}^2 - 13960 \cdot q_{1 \rightarrow 3}^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Данная система решается итерационным методом Ньютона [1], согласно которому вычисляются поправки к участковым расходам  $\Delta q_i$  до тех пор, пока сумма потерь напора в контуре станет меньше допустимого значения. Полученные в результате после первой итерации и окончательные значения расходов

приведены в столбцах 3, 4 таблицы 2.

По найденным потерям напора и необходимому напору рассчитываются свободные напоры в узлах (табл. 3).

Таблица 3

**Свободные напоры в узлах сети**

| Узел     |              | 1    | 2     | 3  | 4     | 5     |
|----------|--------------|------|-------|----|-------|-------|
| Напор, м | Без учета РД | 46,8 | 42,56 | 10 | 28,41 | 14,24 |
|          | С учетом РД  | 50   | 45,76 | 10 | 29,99 | 14,24 |

Затем определяется гидравлическое сопротивление, скорость течения (2,04 м/с) и потери напора по длине в трубопроводе (4,24 м) на участке (2 → 5) с РР, который был ранее исключен из расчетной схемы. По формуле (6) определяются потери напора на РР:

$$\Delta P^{PP} = 42,56 - 14,24 - 4,24 = 24,08 \text{ м.}$$

Затем находится диктующая точка (с минимальным напором) – в узле 3. Путь от диктующей точки до узла 1 с фиксированным напором: 3–4–1. Для расчетов РД по вышеизложенным правилам составляется модифицированная матрица инцидентности **AA**, которая отличается от матрицы **A** последней строкой с путем вместо контура (табл. 4).

Таблица 4

**Строка для кодирования путей в матрице AA**

| № элемента | Участки |         |         |         |         |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|            | (1 → 2) | (4 → 3) | (1 → 4) | (1 → 3) | (5 → 3) |
| Путь       | 0       | -25892  | -25892  | 0       | 0       |

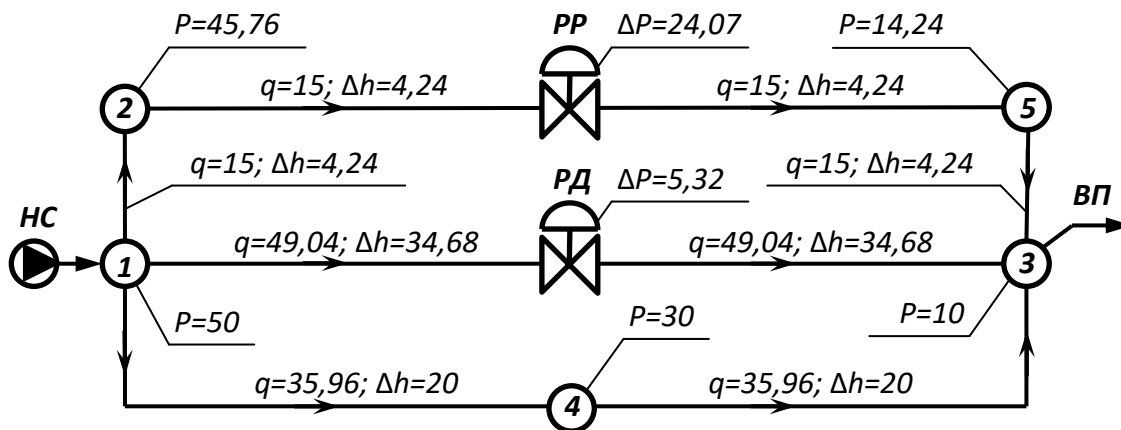


Рис. 3. Схема с рассчитанными параметрами:  
 $\Delta P$  – потери напора на регуляторе, м;  $\Delta h$  – участковые потери напора, м;  
 $q$  – участковые расходы, л/с,  $P$  – узловые напоры, м

На базе матрицы **AA** из уравнений баланса расходов в узлах и потерь напора в пути составляется система нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} -q_{1 \rightarrow 2} - q_{1 \rightarrow 4} - q_{1 \rightarrow 3} &= -0,1 \\ q_{1 \rightarrow 2} &= 0,015 \\ q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 3} + q_{5 \rightarrow 3} &= 0,1 \\ -q_{4 \rightarrow 3} + q_{1 \rightarrow 4} &= 0 \\ -25892 \cdot q_{4 \rightarrow 3}^2 - 25892 \cdot q_{1 \rightarrow 4}^2 &= -40 \end{aligned} \quad (10)$$

Участковые расходы после решения данной системы уравнений методом Ньютона приведены в столбце 5 таблицы 2. Рассчитываются потери напора на всех участках сети с новыми участковыми расходами (столбец 6 таблицы 2), и по формуле (7) определяются потери напора на РД:

$$\Delta P^{РД} = 50 - 10 - 34,67 = 5,33 \text{ м.}$$

Наконец, пересчитываются свободные напоры в узлах (табл. 3). На рисунке 3 показаны рассчитанные параметры элементов сети.

Изложенная методика была реализована на языке Perl как часть онлайн-приложения для моделирования водопроводных сетей [5].

Общее количество итераций по методу Ньютона, затраченное на расчет до допустимой погрешности, приведено в таблице 5.

Как следует из результатов таблицы 5, количество итераций находится в логарифмической зависимости от допустимой невязки.

Таблица 5

**Количество итераций для расчета**

|   |   |   |     |     |      |       |        |
|---|---|---|-----|-----|------|-------|--------|
| Допустимая погрешность суммы контурных потерь напора, м | 5 | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
| Количество итераций                                     | 7 | 9 | 9   | 11  | 13   | 15    | 17     |

В данной работе получены следующие результаты:

- обоснована и разработана методика потокораспределения на водопроводных сетях с регуляторами постоянного давления и расхода;
- разработан компьютерный алгоритм и выполнена онлайн-программа, реализующая предложенную методику;
- проверена работоспособность и сходимость метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений для моделирования работы водопроводной сети с регуляторами.

#### **Литература**

1. Журба, М. Г. Водоснабжение: проектирование систем и сооружений : учебное пособие для вузов по специальности «Водоснабжение и водоотведение». В 3 томах. Том 3. Системы распределения и подачи воды / М. Г. Журба, Л. И. Соколов, Ж. М. Говорова ;

научно-методический руководитель и общий редактор М. Г. Журба. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : АСВ, 2010. – 407 с.

2. Гудков, А. Г. Моделирование наружных сетей водоснабжения и водоотведения : монография / А. Г. Гудков, М. В. Павлов, Д. Ф. Карпов. – Вологда : ВоГУ, 2020. – 230 с.

3. Меренков, А. П. Теория гидравлических цепей / А. П. Меренков, В. Я. Хасилев ; ответственный редактор М. Г. Сухарев. – Москва : Наука, 1985. – 278 с.

4. Шевелев, Ф. А. Таблицы для гидравлического расчета водопроводных труб : справочное пособие / Ф. А. Шевелев, А. Ф. Шевелев. – 11-е изд., доп. – Москва : БАСТЕТ, 2016. – 426 с.

5. Гидравлический расчет водопроводной сети PLUMBING.WEB 3.35. – URL: [web-medium.ru/special/plumbing.web](http://web-medium.ru/special/plumbing.web) (дата обращения: 14.10.2022). – Текст : электронный.

*A.G. Gudkov*

*Vologda State University*

### **IMPROVEMENT OF FLOW DISTRIBUTION METHODOLOGY OF WATER PIPELINE SCHEMES WITH FLOW AND PRESSURE REGULATORS**

A method for calculating flow distribution on water pipeline schemes with constant pressure and flow regulators is proposed. The efficiency of Newton's method in solving a system of nonlinear equations of a non-standard structure for modeling a network with regulators is tested. An example of a calculation according to the proposed methodology is given.

Methodology, flow distribution, hydraulic calculation, water supply network, regulator.