УДК 624.046.5



С.А. Соловьев, Ю.А. Инькова, А.А. Соловьева
Вологодский государственный университет

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ НОРМАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЕРЕВЯННЫХ БАЛОК НА ЗАДАННЫЙ ИНДЕКС НАДЕЖНОСТИ

Ключевым требованием при проектировании несущих элементов сооружений является обеспечение их механической безопасности. В статье разработаны подходы к вероятностному проектированию деревянных балок на заданный индекс надежности. Рассмотрены различные расчетные ситуации с различными комбинациями случайных величин в математических моделях предельных состояний. Рост числа случайных величин приводит к снижению надежности вследствие возрастания алеаторной неопределенности модели. Увеличение степени нелинейности математической модели предельного состояния приводит к росту вычислительной ошибки алгоритма FOSM (First Order Second Moment). Для более достоверной оценки необходимо использовать алгоритм FORM (First Order Reliability Method). Преимуществом разработанных подходов является то, что они могут быть использованы при оценке безопасности эксплуатируемых балок без необходимости введения коэффициентов надежности или коэффициентов запаса.

Надежность, прочность, деревянная балка, вероятность отказа, индекс надежности, нормальные сечения.

Надежность – один из главных показателей качества строительной продукции, характеризующий безопасность эксплуатации строительных конструкций. Развитие методов оценки надежности строительных конструкций, в т.ч. деревянных, является принципом обеспечения механической безопасности на основе Федерального Закона РФ № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений». Профессора И.И. Ведяков и К.П. Пятикрестовский, внесшие значительный вклад в развитие норм расчета и проектирования в т.ч. деревянных конструкций, отмечают [1] предложения о включении в нормы проектирования расчеты на надежность и живучесть, основанные на совместной работе элементов и несущих каркасов.

Для развития деревянного домостроения в Вологодской области в прошлом году утвердили паспорт регионального стратегического проекта «Кластер деревянного домостроения». Его основная задача – увеличить объемы малоэтажного и многоэтажного строительства через ввод новых мощностей и продуктов, привлечение учебной и научной базы региональных высших учебных заведений, расширение внедрения добровольной сертификации и повышение квалификации кадров, использование различных региональных форм поддержки развития индивидуального домостроения. В соответствии с паспортом регионального кластера Вологодской области «Кластер деревянного домостроения» к 2024 году объем ввода жилья, построенного населением, составит 0,279 миллионов квадратных метров, а доля жилья, построенного с применение древесины, от общего объема ввода жилья, построенного населением, составит 81 %.

В данной статье предлагается исследовать подходы к вероятностному проектированию деревянных балок на заданный индекс надежности. В качестве критерия предельного состояния принята прочность нормальных сечений элемента. Для комплексной оценки надежности необходима разработка методов расчета надежности по всем нормативным критериям предельных состояний и последующая системная оценка надежности элемента.

Математическая модель предельного состояния по критерию прочности нормальных сечений в соответствии с СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции» может быть записана в виде:

$$\frac{M}{W_{расч}} \le R_u \,, \qquad (1)$$

где M – расчетный изгибающий момент;

$W_{расч}$ – расчетный момент сопротивления поперечного сечения элемента; для цельных элементов $W_{расч} = W_{нт}$,

где $W_{нт}$ – момент сопротивления поперечного сечения нетто;

R_u – расчетное сопротивление древесины при изгибе.

Рассмотрим расчетный случай однопролетной балки на шарнирных опорах при равномерно распределенной нагрузке q.

В этом случае расчетный изгибающий момент будет $M = \frac{ql^2}{8}$, где l – пролет балки.

Пусть в первом варианте расчета балки на заданный уровень надежности случайной величиной является только нагрузка. Такой вариант возможен на стадии проектирования элемента, когда нет возможности получить информацию о качестве древесины балки. В таком варианте элемент должен быть проанализирован на надежность повторно после его возведения в составе зданий и сооружений.

С учетом вышеизложенного, математическую модель предельного состояния (1) можно переписать в виде:

$$\tilde{q} \le \frac{8R_u W_{нт}}{l^2}, \qquad (2)$$

где $\tilde{q}$ – равномерно распределенная нагрузка на балку (случайная величина).

Если балка находится в составе перекрытия (на нее не действует снеговая нагрузка), то, как правило, все составляющие расчетной нагрузки могут быть описаны нормальным распределением. Так, в соответствии с п. С6 Еврокода 0 для оценки целевых индексов надежности используются нормальные распределения собственного веса и нормальные распределения временных воздействий для всех расчетов кроме усталостных (в данном случае более корректным является использование распределений экстремальных значений).

В стандарте Joint Committee on Structural Safety Probabilistic Model Code (2001) также отмечается, что «удельный вес и размеры элемента конструкции подчиняются гауссовскому распределению. Для упрощения расчетов в качестве приближения может быть сделано допущение о том, что собственный вес G распределяется по гауссовскому закону».

С учетом того, что расчетная нагрузка включает в себя несколько составляющих, математическая модель предельного состояния может быть записана как:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q} \le \frac{8R_u W_{нт}}{l^2}, \qquad (3)$$

где n – количество видов нагрузок, входящих в расчетную нагрузку.

Индекс надежности β вычисляется по формуле (3) в виде:

$$\beta = \frac{\dfrac{8R_u W_{нт}}{l^2} - \sum_{i=1}^{n} m_{q,i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{q,i}^2}}, \qquad (4)$$

где $m_{q,i}$ – математическое ожидание i-ой нагрузки;

$S_{q,i}$ – среднеквадратическое отклонение i-ой нагрузки.

Т.к. классически задача расчета деревянной балки заключается в поиске размеров поперечного сечения при заданной нагрузке и расчетном сопротивлении, выразим из уравнения (4) момент сопротивления балки:

$$W_{нт} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{q,i}^2} \cdot \beta + \sum_{i=1}^{n} m_{q,i}}{8 \cdot R_u} \cdot l^2. \qquad (5)$$

Рассмотрим пример. Пусть требуется запроектировать деревянную балку с индексом надежности, находящимся в интервале $\beta \in [3{,}5;\ 4{,}1]$. Значение индекса надежности менее 3,5 условно не допускается вследствие низкого уровня безопасности эксплуатации, значение индекса надежности более 4,1 условно не допускается вследствие нерационального расхода материала.

Пусть известно, что требуемый пролет балки l=3,6 м; расчетное сопротивление древесины $R_u = 10{,}4$ МПа (сосна, II сорт).

Информация о нагрузках приведена в таблице 1.

Таблица 1

Статистические данные по нагрузкам q_i

№, i	Вид нагрузки	$m_{q,i}$, Н/м	$S_{q,i}$, Н/м	$S_{q,i}^2$, Н^2/м^2
1	Технологическая нагрузка	2500	300	90000
2	Нагрузка от настила на балку	1000	100	10000
3	Звукоизоляция	300	20	400
4	Вес перегородки	500	30	900
Сумма		4300	-	101300

Подставляя нижнее и верхнее значение индекса надежности в (5), получим допустимый интервал момента сопротивления сечения балки:

$$W_{нт} \in [843{,}33;\ 873{,}10] \text{ см}^3.$$

В соответствии с сортаментом пиломатериала по ГОСТ 24454-80 «Пиломатериалы хвойных пород. Размеры» рассмотрим наиболее близкие варианты поперечных сечений к заданным (табл. 2).

Таблица 2

Варианты сечений и моментов их сопротивления

Сечение, см	22,5×10,0	20,0×15,0	17,5×17,5	27,5×7,5	22,5×12,5
Момент сопротивления нетто $W_{нт}$, см^3	843,8	1000,0	893,2	945,13	1054,69

С первоначальной позиции, вариант сечения 225×100 мм является оптимальным. Однако в расчете не был учтен собственный вес балки. Поэтому при выборе типа сечения необходимо сделать небольшой запас для учета этого фактора.

Примем сечение 175×175 мм. Пусть плотность древесины принятой 500 кг/м^3. Тогда погонный метр балки весит:

$$q_{s-w} = 0{,}175 \cdot 0{,}175 \cdot 500 = 15{,}31 \text{ кг/м} = 153{,}1 \text{ Н/м}.$$

Вычислим уточненный индекс надежности по формуле:

$$\beta = \frac{\dfrac{8R_u W_{нт}}{l^2} - \sum_{i=1}^{n} m_{q,i} - q_{s-w}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{q,i}^2}}. \qquad (6)$$

По (6) индекс надежности составит $\beta = 4{,}03$.

Если принять сечение 225×100 мм, то вес погонного метра такой балки составит:

$$q_{s-w} = 0{,}225 \cdot 0{,}100 \cdot 500 = 11{,}25 \text{ кг/м} = 112{,}5 \text{ Н/м}.$$

Тогда по (6) индекс надежности составит $\beta =$ 3,16, что ниже предельной границы по требованию безопасности.

Следовательно, для заданных условий оптимальным является поперечное сечение балки 175×175 мм.

В отдельных случаях, например если допускаются с архитектурной или иной точки зрения только квадратные поперечные сечения, можно изначально записать условие (6) в виде:

$$\beta = \frac{\dfrac{8R_u b^3}{l^2 6} - \sum_{i=1}^{n} m_{q,i} - b^2 \rho}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_{q,i}^2}}, \qquad (7)$$

где ρ – плотность древесины;

Для уточнения расчета, плотность древесины также может быть представлена случайной величиной. В этом случае слагаемое $-b^2\rho$ в (7) может быть включено в сумму $\Sigma m_{q,i}$. В качестве статистических данных о плотности древесины можно использовать, например, сведения из стандарта Joint Committee on Structural Safety Probabilistic Model Code (2001).

Подставляя в (7) все известные значения и решая уравнение, например, в MathCAD, можно сразу найти минимальный размер стороны квадратного сечения по требованию уровня надежности.

Как было отмечено выше, предлагаемый подход рекомендуется использовать при обосновании допустимости применения нормального закона распределения для всех составляющих нагрузки. Если деревянная балка является элементом покрытия, то на нее действует также снеговая нагрузка. Снеговая нагрузка лучше описывается законом распределения Гумбеля [2], нежели нормальным. Таким образом, в составе математической модели предельного состояния будут присутствовать случайные величины с различными законами распределения. Для более удобной работы с математической моделью предельного состояния (7) преобразуем ее к виду:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q} \le \frac{8R_u W_{нт}}{l^2} - \tilde{q}_{snow}, \qquad (8)$$

где $\tilde{q}_{snow}$ – снеговая нагрузка (случайная величина).

Для общности введем обозначения $\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{q} = X$ и $\dfrac{8R_u W_{нт}}{l^2} - \tilde{q}_{snow} = Y$. Случайная величина X описывается нормальным распределением, случайная величина Y – законом распределения Гумбеля. В общем случае для модели вида $X \le Y$ можно записать уравнение для оценки вероятности безотказной работы в виде:

$$P = \int_{0}^{+\infty} f_y(x) \cdot F_x(x) dx, \qquad (9)$$

где $f_y(x)$ – плотность распределения случайной величины Y;

$F_x(x)$ – функция распределения случайной величины X.

С учетом принятых выше законов распределения для модели (8) или $X \le Y$ можно записать выражение (9) в виде:

$$P = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \left[1 + erf\left(\frac{x - m_X}{\sqrt{2 \cdot S_X^2}}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\dfrac{S_y\sqrt{6}}{\pi}} \exp\left[\frac{m_y - 0{,}45 \cdot S_y - x}{\dfrac{S_y\sqrt{6}}{\pi}} - \exp\left(\frac{m_y - 0{,}45 \cdot S_y - x}{\dfrac{S_y\sqrt{6}}{\pi}}\right)\right] dx \qquad (10)$$

В данном случае: $m_y = \dfrac{8R_u W_{нт}}{l^2} - m_{q,snow}$, $S_y = S_{q,snow}$.

В рассмотренных подходах фигурирует предположение о предельном напряжении древесины при изгибе равном расчетному сопротивлению. Расчетное сопротивление древесины при изгибе определяют путем деления нормативного сопротивления древесины при изгибе на коэффициент надежности по материалу. Нормативное сопротивление древесины при изгибе в свою очередь определяется с обеспеченностью 0,95. В связи с этим возникают определенные противоречия – когда в вероятностной модели используются отдельные значения, полученные из другой вероятностной модели и деленные на коэффициент надежности по материалу.

С позиции вероятностных расчетов, когда детерминированные величины считаются за ожидаемые, такие подходы занижают действительный уровень надежности. Для рационализации метода проектирования необходимо использовать прямую вероятностную модель описания предельного напряжения в древесине при изгибе.

Представим математическую модель предельного состояния (8) в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \le \frac{8\tilde{\sigma}_{u,ult} W_{нт}}{l^2}, \qquad (11)$$

где $\tilde{\sigma}_{u,ult}$ – предельное напряжение в древесине при изгибе (случайная величина).

В соответствии с [3], предельное напряжение в древесине может описываться нормальным распределением.

Рассмотрим случай расчета деревянной балки перекрытия, когда нагрузки также описываются нормальным распределением. Т.к. функция предельного состояния является линейной, то для вероятностного расчета может быть использован метод FOSM.

Введем обозначение: $\tilde{q}_{ult} = \dfrac{8\tilde{\sigma}_{u,ult}W_{нт}}{l^2}$. Тогда статистические параметры данной величины можно записать как: математическое ожидание $m_{q,ult} = \dfrac{8m_{\sigma,u,ult}W_{нт}}{l^2}$, стандартное отклонение $S_{q,ult} = \dfrac{8S_{\sigma,u,ult}W_{нт}}{l^2}$. Индекс надежности вычисляется как:

$$\beta = \frac{m_{q,ult} - \sum_{i=1}^{n} m_{q,i}}{\sqrt{S^2_{q,ult} + \sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i}}}. \qquad (12)$$

Подставив статистические параметры для предельного напряжения при изгибе, получим:

$$\beta = \frac{\dfrac{8m_{\sigma,u,ult}W_{нт}}{l^2} - \sum_{i=1}^{n} m_{q,i}}{\sqrt{\left(\dfrac{8S_{\sigma,u,ult}W_{нт}}{l^2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i}}}. \qquad (13)$$

Откуда можно выразить требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_{нт} = \frac{\beta \cdot l^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i} \cdot m_{\sigma,u,ult} - \sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i} \cdot \beta^2 \cdot S^2{}_{\sigma,u,ult} + (\sum_{i=1}^{n} m_{q,i})^2 \cdot S^2{}_{\sigma,u,ult}} + l^2 \cdot m_{\sigma,u,ult} \sum_{i=1}^{n} m_{q,i}}{8 \cdot m^2_{\sigma,u,ult} - 8 \cdot \beta^2 \cdot S^2{}_{\sigma,u,ult}}. \qquad (14)$$

Для более удобного представления введем статистический параметр – коэффициент вариации предельного напряжения древесины при изгибе $v_{\sigma,u,ult} = \dfrac{S_{\sigma,u,ult}}{m_{\sigma,u,ult}}$.

Тогда выражение (14) можно записать как:

$$W_{нт} = \frac{l^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_{q,i} + \beta \cdot l^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i} - \sum_{i=1}^{n} S^2_{q,i} \cdot \beta^2 \cdot v^2{}_{\sigma,u,ult} + (\sum_{i=1}^{n} m_{q,i})^2 \cdot v^2{}_{\sigma,u,ult}}}{8 \cdot m_{\sigma,u,ult} - 8 \cdot \beta^2 \cdot v^2{}_{\sigma,u,ult} \cdot m_{\sigma,u,ult}}. \qquad (15)$$

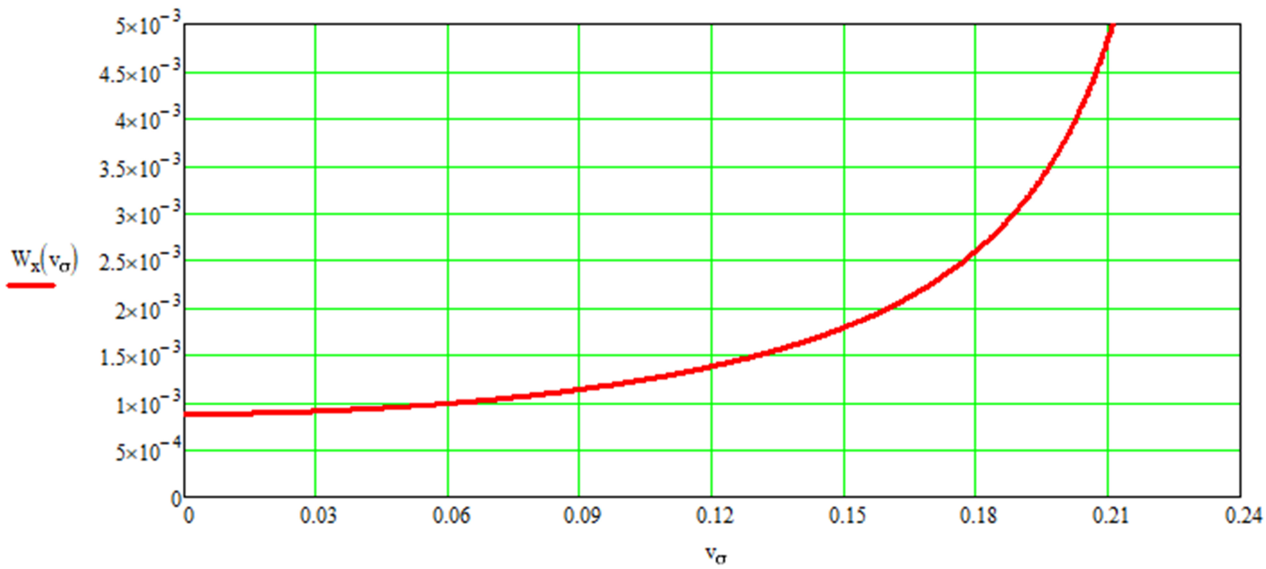

Рис. 1. Зависимость требуемого момента сопротивления сечения в зависимости от коэффициента вариации предельного напряжения

Проанализируем влияние коэффициента вариации $v_{\sigma,u,ult}$ предельного напряжения на требуемый момент сопротивления сечения $W_{нт}$. Используем данные о нагрузке по примеру выше. Вместо расчетного сопротивления древесины при изгибе R_u примем математическое ожидание предельного напряжения $m_{\sigma,u,ult}$. На рисунке 1 представлена динамика изменения требуемого момента сопротивления сечения в зависимости от коэффициента вариации $v_{\sigma,u,ult}$.

Как видно из рисунка 1, при коэффициенте вариации равном $v_{\sigma,u,ult}$ =0 решение получается такое же, как в случае с одним случайным параметром. Рост коэффициента вариации (рост стандартного отклонения при постоянном математическом ожидании) приводит к росту требуемого момента сопротивления, т.к. возрастает статистическая неопределенность. Причем до значения $v_{\sigma,u,ult}$ =0,06 рост требуемого момента сопротивления не такой существенный, а после значения $v_{\sigma,u,ult}$ =0,06 можно наблюдать резкое увеличение требуемого момента сопротивления.

В общем виде прямоугольное сечение деревянной балки (при учете изменчивости размеров поперечного сечения) можно представить следующим образом (рис. 2).

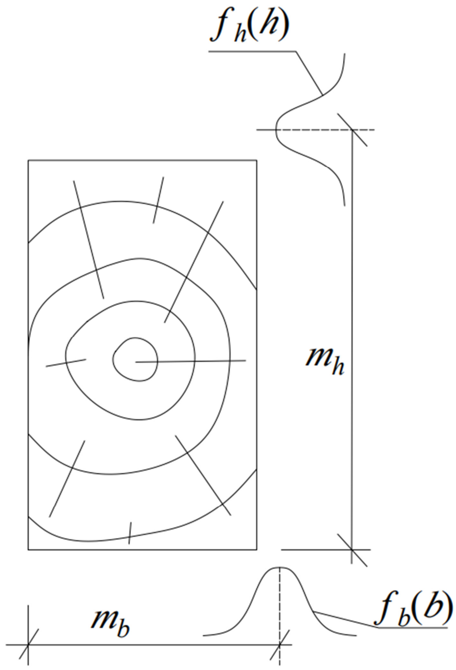

Рис. 2. Поперечное сечение деревянной балки со случайными размерами

Запишем математическую модель предельного состояния (11) с кодированием случайных величин в следующем виде:

$$g\left(\tilde{x}_i\right)=\frac{\tilde{x}_1\cdot l^2}{8}-\tilde{x}_2\cdot\frac{\tilde{x}_3\cdot\tilde{x}_4^2}{6}\leq 0. \quad (16)$$

Для функции предельного состояния (16) вычисляется индекс надежности в виде:

$$\beta=\frac{E[g]}{\sigma_g}, \quad (17)$$

где $E[g]$ – математическое ожидание функции $g\left(\tilde{x}_i\right)$;

σ_g – среднеквадратическое отклонение функции $g\left(\tilde{x}_i\right)$.

Данные параметры определяются с использованием классических методов математической статистики [3].

В соответствии с FORM-алгоритмом [4, 5] для анализа надежности, коэффициенты чувствительности могут быть вычислены как:

$$\alpha_i=-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_{x_i}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad (18)$$

где σ_{x_i} – среднеквадратическое отклонение случайной величины $\tilde{x}_i$.

Затем вычисляются $x*$- и u-координаты для функции предельного состояния $g\left(\tilde{x}_i\right)$:

$$x_i^*=E[x_i]+\beta\cdot\sigma_{x_i}\cdot\alpha_i, \quad (19)$$

$$u_i=\frac{x_i^*-E[x_i]}{\sigma_{x_i}}, \quad (20)$$

где $E[x_i]$ – математическое ожидание случайной величины $\tilde{x}_i$.

После чего строится новая функция предельного состояния $g\left(x_i^*\right)$, и определяется ее производная $\dfrac{\partial g\left(x_i^*\right)}{\partial x_i^*}$.

Новый индекс надежности $\beta*$ можно определить в виде:

$$\beta*=\frac{g\left(x*\right)-\sum\dfrac{\partial g(x*)}{\partial x_i}\sigma_{x_i}u_i}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g(x*)}{\partial x_i}\sigma_{x_i}\right)^2\right]^{1/2}}. \quad (21)$$

Если индекс надежности, рассчитанный по (21), близок к индексу надежности (17), то его принимают за итоговый результат. Если разница велика, алгоритм расчета повторяют по формулам (18)–(21) (начиная с координат $x*$, и получая в дальнейшем координаты $x**$) до требуемой сходимости индекса надежности.

В статье предложены вероятностные подходы к расчету нормальных сечений деревянных балок на заданный индекс надежности.

Рост числа случайных величин в математических моделях предельных состояний приводит к снижению надежности вследствие роста алеаторной неопределенности.

Увеличение степени нелинейности математической модели предельного состояния приводит к росту вычислительной ошибки алгоритма FOSM. Для более достоверной оценки необходимо использовать алгоритм FORM.

Литература

1. Ведяков, И. И. Перспективы совершенствования норм проектирования деревянных конструкций / И. И. Ведяков, А. А. Погорельцев, К. П. Пятикрестовский // Промышленное и гражданское строительство. – 2015. – № 4. – С. 28–32.

2. Соловьева, А. А. Метод оценки надежности элементов плоских ферм на основе p-блоков / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16. – № 2. – С. 153–167.

3. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений / В. Д. Райзер. – Москва : АСВ, 2010. – 384 с.

4. Nie, J. Directional Methods for Structural Reliability Analysis / J. Nie, B. R. Ellingwood // Structural Safety. – 2000. – Vol. 22. – No. 3. – pp. 233–249.

5. Keshtegar, B. A Hybrid Relaxed First-order Reliability Method for Efficient Structural Reliability Analysis / B. Keshtegar, Z. Meng // Structural Safety. – 2017. – Vol. 66. – pp. 84–93.

S.A. Solovev, Yu.A. Inkova, A.A. Soloveva
Vologda State University

PROBABILISTIC CALCULATION OF TIMBER BEAMS STANDARD SECTIONS BY GIVEN RELIABILITY INDEX

The key requirement in structural design is safety ensuring of buildings and structures. The article presents new approaches to probabilistic design of timber beams by the reliability index. There are different design cases with different combinations of random variables in mathematical models of limit states. Increasing of random variable numbers leads to decreasing of reliability level by the reason of aleatory uncertainty. If a limit state model is highly non-linear, then the FOSM (First Order Second Moment) will lead to increasing of the computational error. In this case, the FORM (First Order Reliability Method) can be used for more accurate result. The advantage of proposed methods is the opportunity to use them on the existing beams without introduction of any safety factors.

Reliability, strength, timber beam, failure probability, reliability index, normal cross-section.