УДК 629.788

И.П. Попов
Курганский государственный университет

ОТВЕСНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ РАСЧЕТА БАЛЛИСТИКИ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ МАНЕВРЕ

Задача о скорости, времени и ускорении нормального падения тела на поверхность планеты при отсутствии атмосферы сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка, которое решается стандартным методом. В работе получено временное уравнение движения нормально падающего на поверхность планеты тела при отсутствии атмосферы, а также временные уравнения его скорости и ускорения. Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах и расчетах отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов.

Планета, тело, уравнение движения, скорость, ускорение, масса, расстояние.

В основе гравитационных маневров при межпланетных полетах лежит режим движения под действием силы тяготения небесных тел [1, 2].

Если перемещение тела при падении пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до центра тяготения, то ускорение свободного падения является практически неизменным. При этом задача установления параметров падения не представляет трудности. Далее этот случай не рассматривается.

Задача о скорости и времени падения тела

Падающее в вакууме тело имеет ускорение

$$a=\frac{d^2r}{dt^2}=-G\frac{M}{r^2}, \qquad (1)$$

где G – постоянная, M – масса планеты, r – мгновенное расстояние между телом и центром планеты. Исходное расстояние равно R. Знак «–» обусловлен противоположными направлениями векторов **a** и **r**. Масса тела пренебрежимо мала по сравнению с M.

Дифференциальное уравнение (1) решается следующим образом.

$$\frac{dr}{dt}=v(r),\ \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}v,$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dr}v,$$

$$\frac{dv}{dr}v=-G\frac{M}{r^2},\ vdv=-GM\frac{dr}{r^2},$$

$$\int_0^v vdv=-GM\int_R^r\frac{dr}{r^2},\ \frac{v^2}{2}=GM\left.\frac{1}{r}\right|_R^r,$$

$$\frac{v^2}{2}=GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right), \qquad (2)$$

$$v=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}. \qquad (3)$$

Знак «–» обусловлен той же причиной, что и выше.

$$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}},$$

$$\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}dt. \qquad (4)$$

Интеграл левой части имеет вид:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx.$$

Пусть

$$\frac{a+x}{b-x}=t^2.$$

Тогда

$$a+x=t^2b-t^2x,\ x(1+t^2)=t^2b-a,$$

$$x=\frac{t^2b-a}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2tbdt}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2tdt,$$

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=\int t\left[\frac{2tb}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t\right]dt=$$

$$=\int\frac{2t^2b}{1+t^2}dt-\int\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t^2dt=$$

$$=2b\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt-$$

$$-2b\int \frac{t^4-t^2\, a/b+2t^2-2t^2+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=2b\int dt-2b\int \frac{1}{1+t^2}dt-2b\int dt+$$

$$+2b\int \frac{t^2\, a/b+2t^2+1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\int \frac{1}{1+t^2}dt+2b\left(a/b+2\right)\times$$

$$\times\int \frac{t^2+1/\left(a/b+2\right)+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\operatorname{arctg} t+2b\left(a/b+2\right)\int \frac{dt}{1+t^2}-$$

$$-2b\left(a/b+2\right)\frac{a+b}{a+2b}\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}=$$

$$=-2b\operatorname{arctg} t+2b\left(a/b+2\right)\operatorname{arctg} t-$$

$$-2b\frac{a+2b}{b}\frac{a+b}{a+2b}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg} t\right)+C=$$

$$=-2b\operatorname{arctg} t+2b\left(a/b+2\right)\operatorname{arctg} t-$$

$$-\frac{(a+b)t}{1+t^2}-(a+b)\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=(a+b)\left(\operatorname{arctg} t-\frac{t}{1+t^2}\right)+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-$$

$$-(a+b)\frac{\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}}{1+\frac{a+x}{b-x}}+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-$$

$$-(a+b)\frac{b-x}{a+b}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-$$

$$-\sqrt{(b-x)(a+x)}+C.$$

Искомый интеграл равен

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-$$

$$-\sqrt{(b-x)(a+x)}+C. \qquad (5)$$

Продолжение решения исходной задачи

Интегрирование дифференциального уравнения (4) в соответствии с (5) дает

$$\int_R^r\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt,$$

$$\left[R\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}-\sqrt{r(R-r)}\right]_R^r=$$

$$=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt,$$

$$R\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}-R\frac{\pi}{2}-\sqrt{r(R-r)}=$$

$$=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}\right)+\sqrt{r(R-r)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t. \qquad (6)$$

Это решение дифференциальных уравнений (4) и (1) является уравнением движения нормально падающего тела.

Из выражения (2) следует:

$$r=\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}.$$

Подстановка этого выражения в (6) дает:

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}{R-\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}}}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\left(R-\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2GMR}{2GMR+R^2v^2-2GMR}}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{2GMR\left(2GMR+R^2v^2-2GMR\right)}{\left(2GM+Rv^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2GMR}}{Rv} + \frac{v\sqrt{2GMR}}{2GM + Rv^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}\frac{t}{R}.$$

Это временная функция скорости.

Для получения временной функции ускорения следует (1) подставить в (6).

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}{R - \left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}}\right) +$$
$$+\sqrt{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}\left(R - \left(GMa^{-1}\right)^{1/2}\right)} =$$
$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}t.$$

В соответствии с (6) период падения тела на поверхность планеты равен

$$R\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R_M}{R - R_M}}\right) + \sqrt{R_M(R - R_M)} =$$
$$= \sqrt{\frac{2GM}{R}}T, \qquad (7)$$

где R_M – радиус планеты.

В соответствии с (3) скорость тела у поверхности планеты равна

$$V = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R}}. \qquad (8)$$

Пример

В качестве планеты рассматривается Луна: $R_M = 1{,}737 \cdot 10^6$ м, $M = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ кг. $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²). $R = 10^7$ м, что соответствует высокой почти круговой околополярной орбите вокруг Луны.

В соответствии с (7)

$$10^7\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1{,}737 \cdot 10^6}{(10 - 1{,}737) \cdot 10^6}}\right) +$$
$$+\sqrt{1{,}737 \cdot 10^6 (10 - 1{,}737) \cdot 10^6} =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}348 \cdot 10^{22}}{10^7}}T.$$

Период падения тела на поверхность Луны равен $T = 1{,}535 \cdot 10^4$ с $= 2{,}558 \cdot 10^2$ мин. $= 4{,}253$ ч.

В соответствии с (8) скорость тела у поверхности Луны равна

$$V = -\sqrt{2 \cdot 6{,}674 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}348 \cdot 10^{22}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{1}{1{,}737 \cdot 10^6} - \frac{1}{10^7}} = 2160 \text{ м/с}.$$

Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах [3, 4] и расчетах отвесного падения небольших небесных тел [16] и отработанных элементов конструкций космических аппаратов [5].

Литература

1. Лихачев, В. Н. Метод оценки направления гравитационного ускорения на активном участке посадки КА на поверхность Марса / В. Н. Лихачев, В. П. Федотов // Вестник НПО им. С. А. Лавочкина. – 2016. – № 1 (31). – С. 3–6.
2. Тюменков, Г. Ю. Моделирование периодических орбит для тройных систем с ньютоновским гравитационным взаимодействием / Г. Ю. Тюменков, А. Ю. Песенко, Д. А. Богданович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 4 (29). – С. 27–30.
3. Попов, И. П. Расчетные системы отсчета при относительном движении космических объектов / И. П. Попов // Инженерная физика. – 2019. – № 3. – С. 40–43.
4. Попов, И. П. Выбор систем отсчета в задачах управления движущимися инертными объектами / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 1 (3). – С. 20–22.
5. Попов, И. П. Электромагнитный маховик для ориентирования орбитальных объектов / И. П. Попов // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. – 2019. – № 2. – С. 15–17.

I.P. Popov

Kurgan State University

STEERING COMPONENT OF BALLISTICS CALCULATION IN GRAVITATIONAL MANEUVER

The problem of the speed, time and acceleration of the normal fall of a body on the planet's surface in the absence of an atmosphere is reduced to solving a second-order differential equation which is solved with the standard method. In this paper, the time equation of motion of a body normally falling on the surface of the planet in the absence of an atmosphere, as well as the time equations of its speed and acceleration are obtained. The results obtained can be useful in calculating passive gravitational maneuver during interplanetary flight and the normal incidence of small celestial bodies and the spent structural elements of spacecraft.

Planet, body, equation of motion, speed, acceleration, mass, distance.