УДК 624.046.5

А.А. Соловьева, Е.А. Ильичев
Вологодский государственный университет

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Исследование выполнено в рамках реализации государственного научного гранта Вологодской области (Договор № 19 от 10.12.2021) по теме «Исследование и разработка методов стохастической оценки безопасности эксплуатации пролетных конструкций зданий и инженерных сооружений в условиях ограниченной статистической информации»

В статье предложен новый тип p-блока как модели случайной величины для описания случайных величин в задачах анализа надежности строительных конструкций при неполной статистической информации. P-блок представляет собой две граничные функции распределения вероятностей, которые создают область, внутри которой располагается действительное распределение, но неизвестное вследствие эпистемологической неопределенности. Эффективная комбинация граничных функций на основе неравенства Чебышева и значений статистики Колмогорова – Смирнова позволяет редуцировать эпистемологическую неопределенность модели случайной величины при неполной статистической информации. Использование предложенной модели в практических задачах анализа надежности строительных конструкций позволит сократить размах интервала оценки вероятности отказа или вероятности безотказной работы, тем самым повысив информативность ответа. Преимуществом модели является отсутствие необходимости подтверждения гипотезы о виде распределения случайной величины, т.к. для построения модели необходима информация лишь о первых двух моментах случайной величины в формате доверительных интервалов.

Надежность, p-блок, вероятность отказа, статистика Колмогорова – Смирнова, интервальная оценка, неравенство Чебышева.

Надежность является одним из главных показателей качества и безопасности эксплуатации несущих элементов строительных конструкций. Надежность в совокупности с фактором экономических и неэкономических потерь являются базовыми параметрами для оценки риска, что позволяет выполнять требования Федерального Закона № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» в области обеспечения механической безопасности. Как отмечено в стандарте Eurocode 0 «Basis of Structural Design», надежность обычно выражается в вероятностных терминах.

Задача оценки надежности элементов строительных конструкций на практике усложняется тем, что приходится иметь дело с ограниченной статистической информацией. Например, невозможно отобрать несколько десятков контрольных образцов для испытаний из индивидуального строительного элемента для оценки физико-механических свойств, т.к. это внесет серьезные структурные повреждения. Или же может быть экономически нецелесообразное проведение дорогостоящих испытаний для получения большого объема выборочной совокупности данных. В данных задачах необходимо или использовать гипотезы о виде и форме распределения вероятностей случайной величины, или использовать модели случайных величин, учитывающие эпистемологическую неопределенность, т.е. такую, которая основана на недостатке знаний об объекте.

Первый вариант может быть опасен, т.к. совокупность принятых гипотез может привести к неверным результатам анализа надежности. В связи с этим в настоящее время зачастую используются новые модели случайных величин, учитывающие эпистемологическую неопределенность. Одной из самых известных моделей является p-блок.

P-блок (p-box, probability box) [1–5] представляет собой две граничные функции распределения вероятностей $\overline{F}_X(x)$ и $\underline{F}_X(x)$, которые создают область, внутри которой располагается действительное распределение, но неизвестное вследствие эпистемологической неопределенности. Данные модели базируются на актуальных теориях обработки информации: теории возможностей, теории нечетких множеств, теории свидетельств Демпстера – Шефера, Байессовского подхода и др. Данные подходы к описанию изменчивости случайных величин могут найти отражение в различных задачах строительной отрасли: от оценки механической безопасности до анализа физики среды помещений и энергоэффективности [6–10].

Преимуществом использования p-блоков как моделей случайных величин является отсутствие необходимости в получении полной статистической информации о случайной величине. В исследовании

[11] отмечается, что в практических задачах анализа риска любую случайную величину можно ограничить некоторым интервалом. Все моменты любого ограниченного распределения конечны и, следовательно, существуют в математическом смысле. Следовательно, для таких статистических данных можно принять оценку (точную или интервальную) математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Этой информации уже может быть достаточно для построения модели случайной величины в виде p-блока. Более того, при большом значении нижней границы интервала вероятности безотказной работы будет отсутствовать необходимость уточнять законы распределения случайной величины и значения параметров этих законов.

Так, при наличии статистических данных о случайной величине в виде ее математического ожидания и среднеквадратического отклонения можно построить p-блок на основе неравенств П.Л. Чебышева [12]:

$$\underline{F}_X(x)=\begin{cases}0, & если\ x<m_X+S_X\\ 1-\dfrac{S_X^2}{\left(x-m_X\right)^2}, & если\ x\ge m_X+S_X\end{cases},\quad(1)$$

$$\overline{F}_X(x)=\begin{cases}\dfrac{S_X^2}{\left(x-m_X\right)^2}, & если\ x<m_X-S_X\\ 1, & если\ x\ge m_X-S_X\end{cases}.\quad(2)$$

В исследовании [13] предложены уточненные граничные функции распределения с аналитическим видом:

$$\overline{F}_X(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le m_X+S_X^2/\left(m_X-\overline{x}\right)\\ 1-\left[b(1+a)-c-b^2\right]/a, & если\ m_X+S_X^2/\left(m_X-\overline{x}\right)<x<m_X+S_X^2/\left(m_X-\underline{x}\right)\\ 1/\left[1+S_X^2/(x-m_X)^2\right], & если\ m_X+S_X^2/\left(m_X-\underline{x}\right)<x<\overline{x}\\ 1, & если\ x\ge\overline{x}\end{cases},\quad(3)$$

$$\underline{F}_X(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le\underline{x}\\ 1/\left[1+(x-m_X)^2/S_X^2\right], & если\ \underline{x}<x<m_X+S_X^2/\left(m_X-\overline{x}\right)\\ 1-\left(b^2-ab+c\right)/(1-a), & если\ m_X+S_X^2/\left(m_X-\overline{x}\right)<x<m_X+S_X^2/\left(m_X-\underline{x}\right)\\ 1, & если\ x\ge m_X+S_X^2/\left(m_X-\underline{x}\right)\end{cases},\quad(4)$$

где $x\in\left[\underline{x},\ \overline{x}\right]$; параметры функций (3)–(4) вычисляются следующим образом: $a=\left(x-\underline{x}\right)/\left(\overline{x}-\underline{x}\right)$, $b=\left(m_X-\underline{x}\right)/\left(\overline{x}-\underline{x}\right)$ и $c=S_X^2/\left(\overline{x}-\underline{x}\right)^2$.

Аналогично в исследовании [14] построены граничные функции p-блока на основе неравенства Кантелли.

В [15] доказано, что при доверительной оценке параметров $m_X\in\left[\underline{m}_X;\ \overline{m}_X\right]$ и $S_X\in\left[\underline{S}_X;\ \overline{S}_X\right]$ граничные функции распределения вероятностей случайной величины следует представлять в виде: $\overline{F}_X(\overline{m}_X,\ \overline{S}_X,\ x)$ и $\underline{F}_X(\underline{m}_X,\ \overline{S}_X,\ x)$.

Рассмотрим пример. Пусть необходимо создать модель случайной величины на основе p-блока для напряжения стали, соответствующего пределу текучести. Для этого были проведены испытания 15 контрольных образцов стали.

Статистические параметры для экспериментальных данных выборочной совокупности приведены в таблице.

Таблица

Статистические характеристики выборки

Параметр	*Значение, МПа*
Выборочное среднее значение	325,93
Выборочное стандартное (среднеквадратическое) отклонение	5,62
Доверительный интервал для математического ожидания	[322,84; 329,03]
Доверительный интервал для стандартного отклонения	[4,19; 8,87]
Выборочная оценка медианы	327
Доверительный интервал для медианы	[320; 330]

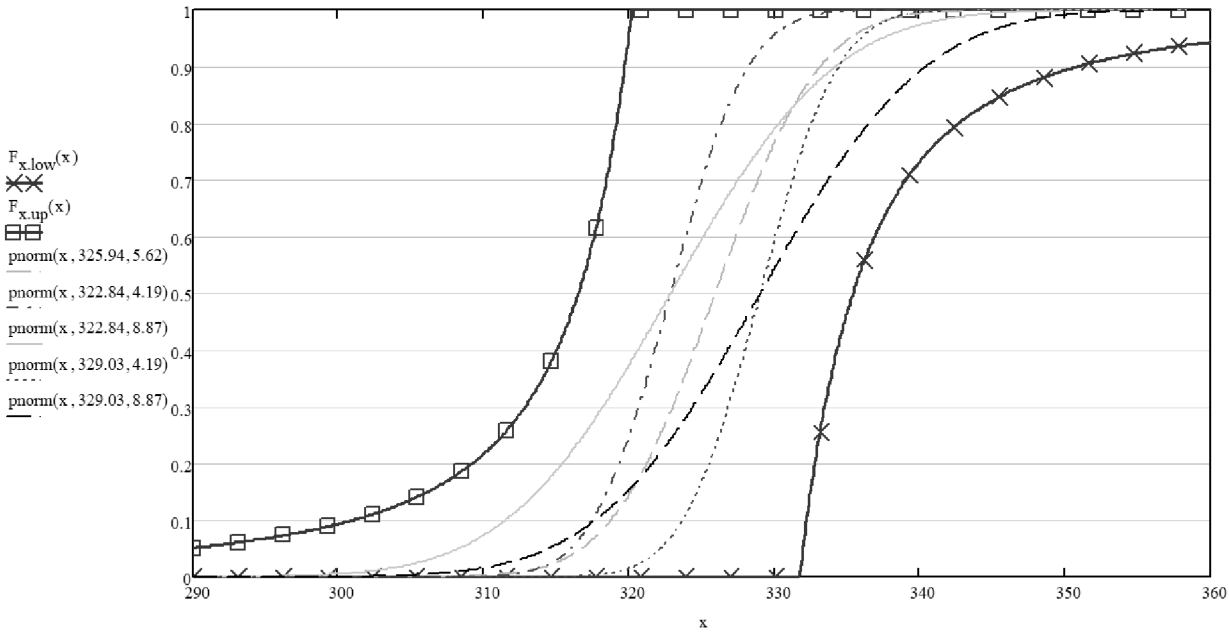
Доверительные интервалы для математического ожидания и среднеквадратического отклонения получены на основе алгоритма Национального стандарта РФ ГОСТ Р 50779.21–2004 «Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным». Доверительный интервал для медианы вычисляется по значениям k=4 и n-k+1=12. Соответственно, $\left[med\,\underline{X} = x_{[4]} = 320;\quad med\,\overline{X} = x_{[12]} = 330\right]$ МПа.

На рисунке 1 приведены графики граничных функций p-блоков (1)–(4) (с обозначениями $\underline{F}_X(x) = F_{low}(x)$ и $\overline{F}_X(x) = F_{up}(x)$), а также графики функций нормального распределения вероятностей с возможными комбинациями значений доверительных интервалов математического ожидания и среднеквадратического отклонения с обозначением pnorm(x, m_X, S_X), где pnorm() – кумулятивная функция нормального распределения вероятностей.

Возможные комбинации параметров нормального распределения также образуют p-блок с аналитическим видом:

$$\underline{F}_X(x) = \begin{cases} pnorm(x, \underline{m}_X,\ \overline{S}_X), & если\ x < \underline{m}_X \\ pnorm(x, \underline{m}_X,\ \underline{S}_X), & если\ x \ge \underline{m}_X \end{cases}, \quad (5)$$

$$\overline{F}_X(x) = \begin{cases} pnorm(x, \overline{m}_X,\ \underline{S}_X), & если\ x < \overline{m}_X \\ pnorm(\underline{m}_X,\ \overline{S}_X), & если\ x \ge \overline{m}_X \end{cases}. \quad (6)$$



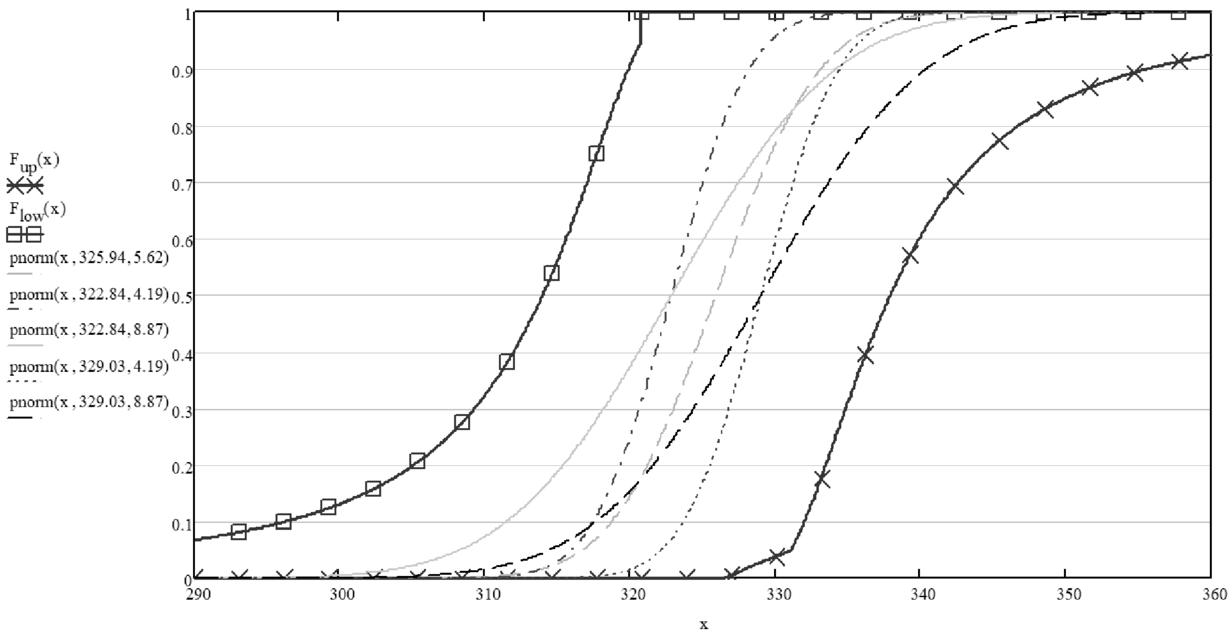


Рис. 1. Р-блок: а) с граничными функциями (1)–(2) для данных по таблице 2;
б) с граничными функциями (3)–(4) для данных по таблице 2

Недостатком p-блока с граничными функциями (5)–(6) является необходимость гипотезы о подтверждении нормального распределения случайной величины, что вносит дополнительный элемент неопределенности в задачи расчета надежности строительных конструкций. Однако при объективном и достоверном подтверждении этой гипотезы, можно сократить область между граничными функциями (рис. 1), что приведет к сокращению размаха интервала надежности и повышению информативности результата расчета надежности.

В данном исследовании предлагается уточнить модели p-блоков (1)–(4) путем введения дополнительной информации о возможных границах распределения из значений статистики Колмогорова – Смирнова.

Критерий согласия Колмогорова предназначен для проверки гипотезы о принадлежности выборочной совокупности данных некоторой функции распределения вероятностей случайной величины, иными словами для проверки того, что эмпирическое распределение соответствует предполагаемой модели или функции случайной величины. Статистика критерия Колмогорова – Смирнова D_n вычисляется по формуле:

$$D_n = \sup_{x \in R} \left| F_{emp}(x) - F_X(x) \right|, \tag{7}$$

где $F_{emp}(x)$ – функция эмпирического распределения вероятностей; $F_X(x)$ – предполагаемая функция распределения вероятностей; sup – супремум функции $\left| F_{emp}(x) - F_X(x) \right|$.

В случае выборок малого объема (n<25) критерий Колмогорова – Смирнова предпочтительней использовать с поправкой Большева в следующем виде:

$$D_n \sqrt{n} + \frac{1}{6\sqrt{n}}. \tag{8}$$

Таким образом, можно сформировать отдельный p-блок по условию статистики Колмогорова – Смирнова в виде:

$$\begin{gathered} \max\left(F_X(x) - D_n;\ 0\right) \le F_X(x) \le \\ \le \min\left(F_X(x) + D_n;\ 1\right) \end{gathered}. \tag{9}$$

Недостатком p-блока (9) является то, что граничные функции предельного состояния всегда будут иметь детерминированные минимальные и максимальные значения после определенной точки. Данный недостаток не позволяет эффективно работать с «хвостами» распределений вероятностей.

Однако данного недостатка можно избежать, если использовать пересечение двух p-блоков (3)–(4) и (9), что позволит получить удобную модель случайной величины со снижением эпистемологической неопределенности. В центральной части p-блока используется модель на основе статистики Колмогорова – Смирнова, а хвосты p-блока описываются граничными функциями распределения на основе неравенства Чебышева. Графический вид такого p-блока для данных по таблице 1 приведен на рисунке 2.

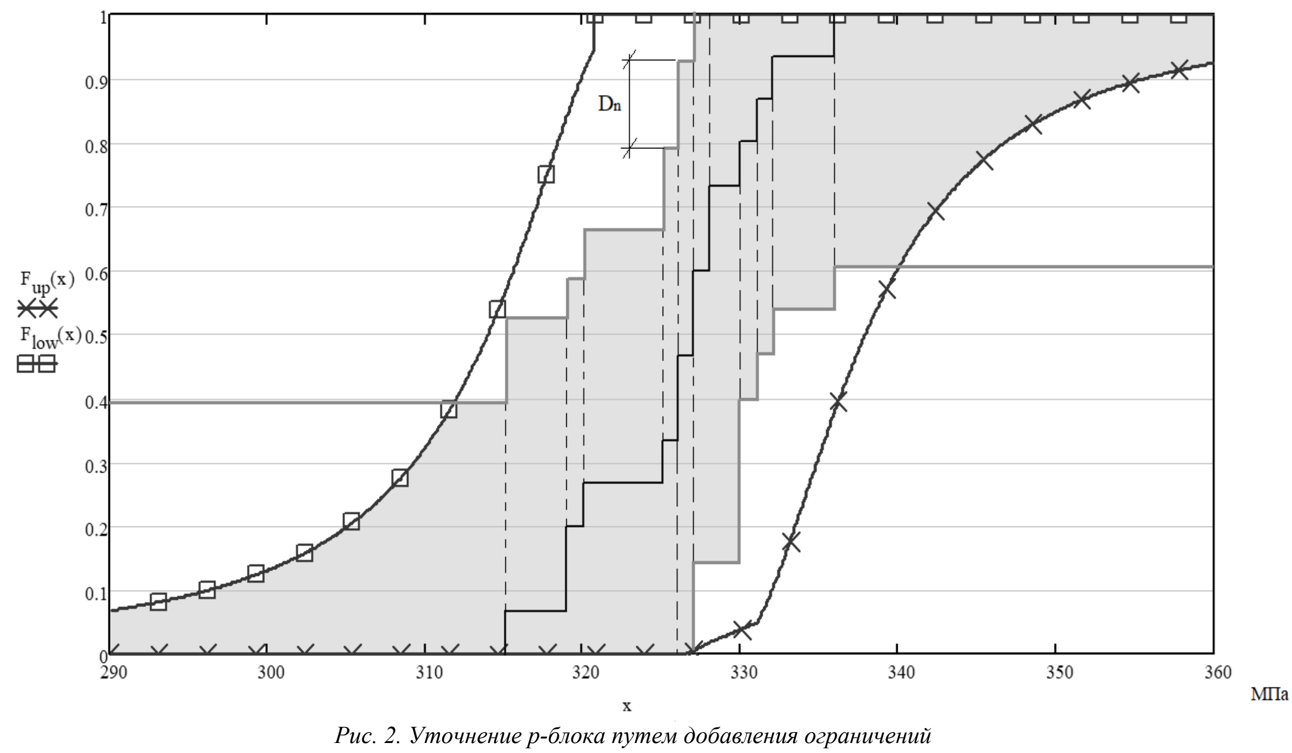


Рис. 2. Уточнение p-блока путем добавления ограничений на базе статистики Колмогорова – Смирнова

В статье предложен новый тип p-блока, который строится на базе эффективной комбинации граничных функций на основе неравенства Чебышева и значений статистики Колмогорова – Смирнова, что позволяет редуцировать эпистемологическую неопределенность модели случайной величины при неполной статистической информации. Преимуществом модели является отсутствие необходимости подтверждения гипотезы о виде распределения случайной величины, т.к. для построения модели необходима информация лишь о первых двух моментах случайной величины в формате доверительных интервалов.

Использование предложенных моделей случайных величин в задачах анализа надежности строительных конструкций позволит повысить информативность интервала надежности, выраженного в показателях вероятности безотказной работы или вероятности отказа, что улучшит возможность принятия решений в условиях неопределенности статистических данных.

Литература

1. Соловьева, А. А. Метод оценки надежности элементов плоских ферм на основе p-блоков / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 2. – С. 153–167.

2. Соловьева, А. А. Исследование развития моделей случайных величин в расчетах надежности строительных конструкций при неполной статистической информации / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 5. – С. 587–607.

3. Soloveva, A. A. Reliability Analysis of Rhs Steel Trusses Joints Based on the P-Boxes Approach / A. A. Soloveva, S. A. Solovev // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17, No 1. – P. 87–97.

4. Utkin, L. V. On Reliability Growth Models Using Kolmogorov – Smirnov Bounds / L. V. Utkin, F. P. A. Coolen // International Journal of Performability Engineering. – 2011. – Vol. 7, No. 1. – P. 5–19.

5. Zhang, H. Structural Analysis with Probability-boxes / H. Zhang, R. L. Mullen, R. L. Muhanna // International Journal of Reliability and Safety. – 2012. – Vol. 6, No. 1-3. – P. 110–129.

6. Uncertainty Propagation Analysis Using Sparse Grid Technique and Saddlepoint Approximation Based on parameterized P-Box Representation / Liu H. B., Jiang C., Liu J., & Mao J. Z. // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2019. – 59 (1). – P. 61–74.

7. Straub, D. A Probability-Box-Based Method for Propagation of Multiple Types of Epistemic Uncertainties and its Application on Composite Structural-Acoustic System / W. Zhu, N. Chen, Liu, J., & Beer, M. // Mechanical Systems and Signal Processing, 149, 107184.

8. Соловьев, С. А. Вероятностная оценка промышленной безопасности при неполной статистической информации / С. А. Соловьев // Безопасность труда в промышленности. – 2020. – № 9. – С. 88–93.

9. Соловьев, С. А. Моделирование случайной статической нагрузки на покрытия сооружений при неполной статистической информации / С. А. Соловьев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 243–249.

10. Некоторые особенности и результаты теплового контроля навесных вентилируемых фасадных систем объектов капитального строительства / Д. Ф. Карпов, М. В. Павлов, А. А. Синицын [и др.] // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2020. – Т. 47, № 1. – С. 147–155.

11. Ferson, S. Distribution-free Uncertainty Propagation / Ferson S., Gray A. // Proceedings of the 9th International Workshop on Reliable Engineering Computing REC'2021 (Taormina, 16–20 May 2021). – Taormina, 2021. – P. 395–407.

12. Oberguggenberger, M. Reliability Bounds Through Random Sets: Non-parametric Methods and Geotechnical Applications / Oberguggenberger M., Fellin W. // Computers & Structures. – 2008. – Vol. 86, No. 10. – P. 1093–1101.

13. Structural Reliability Analysis on the Basis of Small Samples: An Interval Quasi-Monte Carlo Method / Zhang H., Dai H., Beer M., Wang W. // Mechanical Systems and Signal Processing. 2013. – Vol. 37, No. 1–2. – P. 137–151.

14. Troffaes, M. A Cantelli-type Inequality for Constructing Non-Parametric P-Boxes Based on Exchangeability / Troffaes M., Basu T. // International Symposium on Imprecise Probabilities: Theories and Applications. – PMLR, 2019. – P. 386–393.

15. Соловьева, А. А. Уточненный p-блок на основе неравенства Чебышева для анализа надежности строительных конструкций / А. А. Соловьева // XIV Ежегодная научная сессия аспирантов и молодых ученых : материалы Всероссийской научной конференции : в 3 томах. – Вологда : Вологодский государственный университет, 2020. – С. 420–423.

A.A. Solovyova, E.I. Ilyichev
Vologda State University

RANDOM VARIABLE MODEL UPDATE IN PROBLEMS OF STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS WITH LIMITED STATISTICAL INFORMATION

The article describes a new type of p-box as a random variable model for problems of analyzing the structural reliability analysis with imprecise statistical data. The p-box represents two boundary probability distribution functions that create an area within which the actual distribution is located, but it's unknown due to epistemic uncertainty. An effective combination of boundary functions based on the Chebyshev's inequality and the values of Kolmogorov-Smirnov statistics makes it possible to reduce the epistemological uncertainty of the random variable model with incomplete statistical information. The use of the proposed model in practical tasks of structural reliability analysis will reduce the

scope of the interval for assessing the failure probability, thereby increasing the informative response. The advantage of the model is that there is no need to confirm the hypothesis about the type of distribution of a random variable as to build the model only information about the first two moments of a random variable in the form of confidence intervals is necessary.

Reliability, p-box, failure probability, Kolmogorov-Smirnov bounds, interval estimation, Chebyshev's inequality.