УДК 624.046.5



С.А. Соловьев, А.Э. Иньков, А.А. Соловьева
Вологодский государственный университет

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНЫХ ФЕРМ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В статье представлен новый подход к анализу надежности стальных плоских ферм, основанный на использовании информации о границах изменчивости случайных величин для их моделирования. Использование ряда необоснованных гипотез (о виде распределения, значениях параметров закона распределения и т.д.) может привести к ошибочным выводам. В исследовании предлагается базироваться только на интервальных оценках границ изменчивости случайных величин. Приведен численный пример анализа надежности стержня фермы. В сравнении с классическим подходом при предположении нормального распределения, результат расчета надежности оказывается ниже, что формирует некоторый запас надежности. Использование граничных значений областей изменчивости случайных величин позволяет оценить надежность элементов стальных ферм без предположений о виде и форме распределения вероятностей. Аналогично может быть решена обратная задача, например оценка допусков площади поперечного сечения стержней при производстве, исходя из требований заданной надежности (вероятности безотказной работы).

Надежность, вероятность отказа, интервальная оценка, теория выпуклых множеств, ферма, вероятностное проектирование.

Надежность является одним из главных показателей качества и безопасности эксплуатации несущих элементов строительных конструкций. Надежность в совокупности с фактором экономических и неэкономических потерь являются базовыми параметрами для оценки риска, что позволяет выполнять требования Федерального Закона №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» в области обеспечения механической безопасности. Как отмечено в стандарте Eurocode 0 «Basis of Structural Design», надежность обычно выражается в вероятностных терминах.

Используемый в данное время метод предельных состояний подвергается критике. Профессор В.Д. Райзер отмечает, что «существующие методы проектирования не позволяют оценивать надежность конструкций, и тем более проектировать их с заданным уровнем надежности» [1]. В исследовании [2] также почеркнуто, что «в существующем виде детерминированный метод предельных состояний не дает четкого ответа о надежности конструкций, не позволяет проектировать их с заданным уровнем надежности и оценить качество проектного решения по этому критерию. Недостатком этого метода является также то, что он оперирует расчетными (определенными) параметрами, в то время как они зачастую являются случайными величинами с разными характеристиками изменчивости, сопоставлять которые, например, в статических условиях равновесия можно только с определенной степенью приближения.

В стандарте Eurocode 0 «Basis of Structural Design» предложена методика вероятностного расчета надежности, основанная на использовании методов теории вероятностей и математической статистики. Высказывается мысль о разумности оценки различного рода неопределенностей с помощью интервалов.

В актуальном исследовании [3] отмечается, что в практических инженерных задачах неизбежно существуют неопределенности в конструкционных нагрузках и воздействиях, характеристиках материалов, погрешностях измерений и монтажа и т.д. До сих пор вероятностная модель как наиболее значимый инструмент широко применялась в инженерных задачах для количественной оценки неопределенностей структурных параметров. Вероятностная модель требует достаточного количества выборочных данных для получения точного распределения вероятностей [4]. Однако из-за экономических и технологических ограничений, данное требование трудно выполнить в комплексных инженерных задачах [5]. В качестве альтернативы неклассический метод безвероятностного выпуклого моделирования (convex sets) может оценивать границы неопределенных параметров с ограниченными выборочными статистическими данными. Данный метод получил широкое распространение в последние годы.

В [6] также отмечено, что «во многих случаях при использовании вероятностной модели для анализа практических проблем неопределенности приходится делать предположения о распределении вероятностей для параметров. Однако были исследования, указывающие на то, что даже небольшое отклонение параметров распределения от реальных значений, вероятно, приведет к очень большой ошибке анализа надежности. С другой стороны, благодаря обширной инженерной практике было установлено, что хотя очень трудно получить точные распределения вероятностей неопределенных параметров, когда выборки недостаточны или низкого качества, как правило, нетрудно получить интервалы их изменения на основе ограниченных данных и нашего инженерного опыта. Например, при анализе обработки листового металла трудно получить распределение вероятности коэффициента трения между пресс-формой и листом из-за сложности смазочной среды; однако, основываясь на имеющемся опыте, мы знаем, что такой коэффициент трения лежит в интервале 0,1–0,2». Аналогичная проблема рассматривается и в исследовании [7].

Целью данного исследования является разработка метода анализа надежности элементов стальных ферм при интервальной оценке случайных величин.

Рассмотрим подход к оценке надежности фермы на примере фермы с расчетной схемой по рисунку 1.

Используя известные подходы строительной механики, можно получить следующие выражения усилий в стержнях фермы (табл.).

Из таблицы видно, что любое усилие $\widetilde{N}_{i-j}$ может быть выражено в общем виде как:

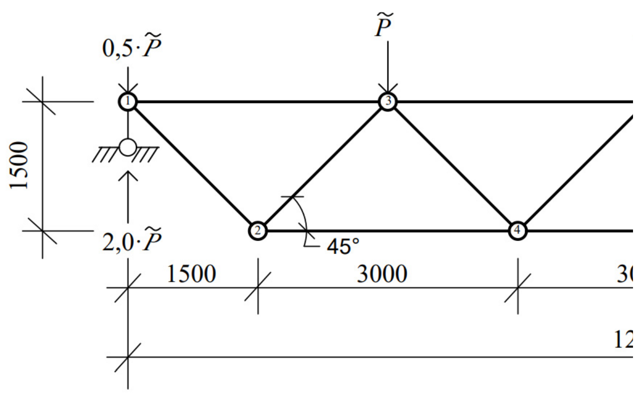

Рис. 1. Расчетная схема фермы со случайной нагрузкой $\widetilde{P}$

Таблица

Усилия в стержнях фермы по рисунку 1

Стержни	Усилие в стержне	Стержни	Усилие в стержне
1–2, 8–9	$\widetilde{N}_{1-2} = +\dfrac{3\cdot\widetilde{P}}{\sqrt{2}}$	3–4, 6–7	$\widetilde{N}_{3-4} = +\dfrac{\widetilde{P}}{\sqrt{2}}$
1–3, 7–9	$\widetilde{N}_{1-3} = -1{,}5\cdot\widetilde{P}$	3–5, 5–7	$\widetilde{N}_{3-5} = -3{,}5\cdot\widetilde{P}$
2–3, 7–8	$\widetilde{N}_{2-3} = -\dfrac{3\cdot\widetilde{P}}{\sqrt{2}}$	4–5, 5–6	$\widetilde{N}_{4-5} = -\dfrac{\widetilde{P}}{\sqrt{2}}$
2–4, 6–8	$\widetilde{N}_{2-4} = +3\cdot\widetilde{P}$	4–6	$\widetilde{N}_{4-6} = +4\cdot\widetilde{P}$

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) = \widetilde{P}\cdot\delta,$$

где δ – коэффициент, зависящий от геометрических размеров и формы фермы.

С учетом вышеизложенного, для любого стержня фермы можно составить математическую модель предельного состояния вида:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \le \widetilde{N}_{i-j,ult}, \quad (1)$$

где $\widetilde{N}_{i-j,ult}$ – предельное продольное усилие для стержня фермы *i-j*.

Предельное усилие для *i-j* элемента фермы может быть определено по различным критериям предельных состояний.

Например, по условию прочности стали стержня фермы:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \le \widetilde{N}_{i-j,ult} = \widetilde{\sigma}_{s,ult}\cdot A, \quad (2)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня фермы; $\widetilde{\sigma}_{s,ult}$ – предельное напряжение в стали стержня фермы (случайная величина).

Из условия устойчивости *i-j* стержня фермы:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \le \widetilde{N}_{i-j,ult} = \widetilde{\sigma}_{s,ult}\cdot A\cdot\widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\sigma}_{s,ult}\right), \quad (3)$$

где $\widetilde{\varphi}$ – коэффициент продольной устойчивости.

Площадь поперечного сечения стержня фермы A принята детерминированной (постоянной) величиной, т.к. в задачах оценки надежности эксплуатируемых ферм можно многократно и с высокой точностью измерить данную характеристику. При оценке надежности ферм на стадии проектирования, площадь поперечного сечения стержней фермы может быть принята в виде случайной величины, т.к. металлопрокат имеет различный коэффициент вариации (в зависимости от завода-производителя, стандарта и типа сечения), что не позволяет заранее дать точную оценку площади поперечного сечения стержней.

Выражения (2) и (3) могут быть записаны в классической форме функции предельного состояния:

$$g\left(\widetilde{P},\ \widetilde{\sigma}_{i-j,s,ult},\ \widetilde{A}_{i-j}\right) = \widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) - \widetilde{\sigma}_{i-j,s,ult}\cdot\widetilde{A}_{i-j} \le 0,$$

$$g\left(\widetilde{P},\ \widetilde{\sigma}_{i-j,s,ult},\ \widetilde{A}_{i-j}\right) = \widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) - \widetilde{\sigma}_{i-j,s,ult}\cdot\widetilde{A}_{i-j}\cdot\widetilde{\varphi}_{i-j}\left(\widetilde{\sigma}_{i-j,s,ult}\right) \le 0.$$

Как было отмечено выше, многие случайные величины целесообразно представлять в виде интервала возможных значений.

Пусть функция $g(\tilde{x}_i)$ сформирована случайными величинами, значения которых представлены напрямую интервальной оценкой. Следовательно, случайная величина $\tilde{x}_i$ характеризуется некоторым интервалом значений $\tilde{x} \in x^I = [\underline{x};\ \overline{x}]$, где $\underline{x}$ и $\overline{x}$ – нижняя и верхняя граница интервала соответственно. Для данного интервала (как характеристики случайной величины) могут быть введены два параметра [8]: центр $x^c = \dfrac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$ и радиус $x^r = \dfrac{\overline{x}-\underline{x}}{2}$.

Интервальную случайную величину можно представить в виде $x^I = x^c + x^r\Delta^I$, где Δ^I – интервал $\Delta^I = [-1;\ 1]$.

Для двух случайных интервальных величин x^I и y^I характерны следующие математические зависимости [8]:

$$x^I + y^I = [\underline{x};\ \overline{x}] + [\underline{y};\ \overline{y}] = [\underline{x}+\underline{y};\ \overline{x}+\overline{y}],$$

$$x^I - y^I = [\underline{x};\ \overline{x}] - [\underline{y};\ \overline{y}] = [\underline{x}-\overline{y};\ \overline{x}-\underline{y}],$$

$$x^I \cdot y^I = [\underline{x};\ \overline{x}]\cdot[\underline{y};\ \overline{y}] = \begin{bmatrix} \min\{\underline{x}\cdot\underline{y};\ \underline{x}\cdot\overline{y};\ \overline{x}\cdot\underline{y};\ \overline{x}\cdot\overline{y}\} \\ \max\{\underline{x}\cdot\underline{y};\ \underline{x}\cdot\overline{y};\ \overline{x}\cdot\underline{y};\ \overline{x}\cdot\overline{y}\} \end{bmatrix},$$

$$x^I / y^I = [\underline{x};\ \overline{x}]/[\underline{y};\ \overline{y}] = [\underline{x};\ \overline{x}]\cdot[1/\overline{y};\ 1/\underline{y}].$$

Рассмотрим пример. Пусть для расчета надежности получена следующая информация относительно стержня 4–6 (рис. 1):

$\tilde{N}_{4-6} \in [150;\ 170]$ кН,

$\tilde{\sigma}_{4-6,s,ult} \in [240;\ 260]$ МПа,

$\tilde{A}_{4-6} \in [7,0;\ 7,5]$ м².

Требуется оценить надежность элемента 4–6 фермы по критерию прочности.

На рисунке 2 представлен параллелепипед, сформированный границами изменчивости случайных величин. Для дальнейшего расчета необходимо определить точки на параллелепипеде, которые формируют треугольную пирамиду, отсекаемую функцией предельного состояния:

$$g\left(\tilde{P},\ \tilde{\sigma}_{4-6,s,ult},\ \tilde{A}_{i-j}\right) = \\ = \tilde{N}_{4-6}\left(\tilde{P}\right) - \tilde{\sigma}_{4-6,s,ult}\cdot\tilde{A}_{4-6} = 0\,.$$

Последовательно решая три уравнения, можно определить координаты данных точек (рис. 2).

Объем отсекаемой пирамиды равен (без указания единиц измерения):

$$V_f = \frac{1}{3}S_{осн}h = \\ = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left[(243-240)(7{,}08-7{,}00)\right][170-168] = 0{,}08\,.$$

Объем параллелепипеда равен (без указания единиц измерения):

$$V = \Delta A_{4-6}\cdot\Delta N_{4-6}\cdot\Delta\sigma_{4-6,s,ult} \to 0{,}5\cdot 20\cdot 20 = 200.$$

В соответствии с [8], надежность стержня вычисляется как:

$$P = 1 - P_f = 1 - \frac{V_f}{V} = 1 - \frac{0{,}08}{200} = 0{,}99960\,.$$

Предположим, что была получена дополнительная информация о случайных величинах – подтвержден закон нормального распределения вероятностей. Параметры случайных величин зададим с приближенным учетом «правила трех сигм» в виде: $m_N = 160$ кН, $S_N = 4$ кН, $m_\sigma = 250$ МПа $S_\sigma = 4$ МПа, $m_A = 7{,}25\cdot 10^{-4}$ м², $m_A = 7{,}09\cdot 10^{-4}$ м², где m_x – математическое ожидание случайной величины x; S_x – среднеквадратическое отклонение случайной величины x.

В этом случае для расчета можно воспользоваться классическим вероятностным подходом FOSM (First Order Second Moment). Математическое ожидание функции предельного состояния m_g можно записать в виде:

$$m_g = m_R m_A - m_N\,.$$

Среднеквадратическое отклонение функции предельного состояния можно найти с учетом линеаризации функции g в виде:

$$S_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial R}\right)^2_{m_A} S_R^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial N}\right)^2 S_N^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial A}\right)^2_{m_R} S_A^2}\,.$$

Подставим вышеуказанные данные, получим $m_g = 21{,}25$ кН, $S_g = 5{,}43$ кН. Индекс надежности составит: $\beta = \dfrac{m_g}{S_g} \to 3{,}91$. Тогда при нормальном распределении вероятность безотказной работы будет P=0,99994.

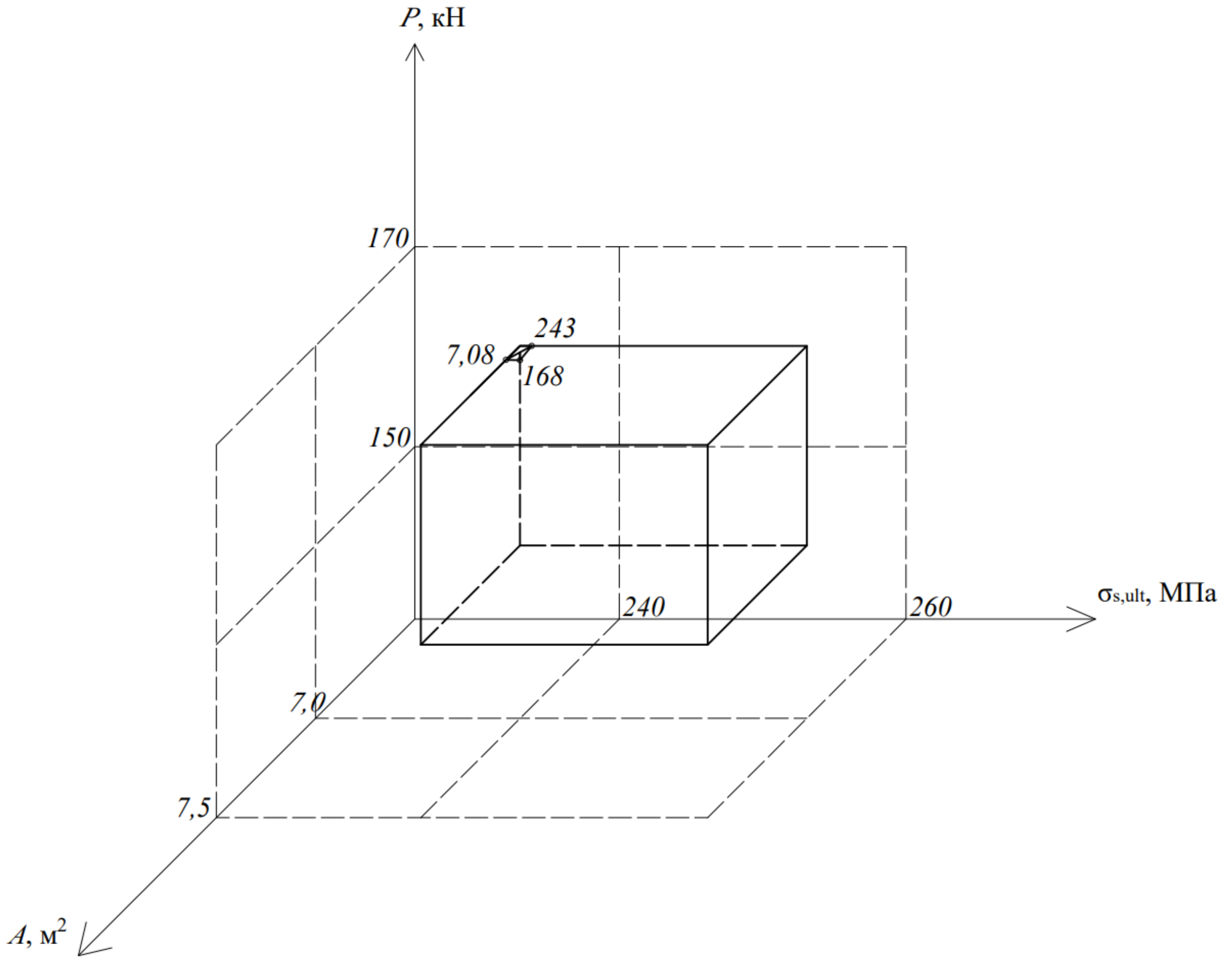

Рис. 2. Модель параллелепипеда, сформированная границами изменчивости случайных величин в математической модели предельного состояния стержня фермы

Результат расчета надежности по методу FOSM оказался выше. Это связано с предположением или доказательством конкретного распределения вероятностей случайных величин. Однако на практике зачастую не удается получить полную статистическую информацию для обоснования закона распределения случайной величины. К тому же в случае совокупности различных распределений для случайной нагрузки на ферму может быть затруднителен подбор общей вероятностной модели нагрузки как случайной величины.

Использование граничных значений случайных величин позволяет оценить надежность без предположений о виде и форме распределения вероятностей. Аналогично может быть решена обратная задача – оценка допусков площади поперечного сечения стержней при производстве, исходя из требований заданной надежности (вероятности безотказной работы).

Литература

1. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений / В. Д. Райзер. – Москва : АСВ, 2010. – 384 с.

2. Краснощеков, Ю. В. Вероятностное проектирование конструкций по заданному уровню надежности / Ю. В. Краснощеков, М. Ю. Заполева // Вестник СибБАДИ. – 2015. – № 1 (41). – С. 68–73.

3. Non-probabilistic polygonal Convex Set Model for Structural Uncertainty Quantification / L. Cao, J. Liu, L. Xie [et al.] // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 89. – P. 504–518.

4. A General Frame for Uncertainty Propagation under Multimodally Distributed Random Variables / X. Meng, J. Liu, L. Cao [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – Vol. 367. – P. 113109.

5. Evidence-based Structural Uncertainty Quantification by dimension Reduction Decomposition and Marginal Interval Analysis / L. Cao, J. Liu, C. Jiang [et al.] // Journal of Mechanical Design. – 2020. – Vol. 142 (5). – P. 051701.

6. Jiang, C. Probability-interval Hybrid Uncertainty Analysis for Structures with Both Aleatory and Epistemic Uncertainties: a Review / C. Jiang, J. Zheng, X. Han // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2018. – Vol. 57, No. 6. – P. 2485–2502.

7. Structural Reliability Analysis Based on Fuzzy Random Uncertainty / L. You , J. Zhang, Q. Li, N. Ye // Eksploatacja i Niezawodność. – 2019. – Vol. 21 (4). – P. 599–609.

8. A Non-Probabilistic Set Model of Structural Reliability Based on Satisfaction Degree of Interval / H. Z. Huang, Z. L. Wang, Y. F. Li [et al.] // Mechanika. – 2011. – Vol. 17 (1). – P. 85–92.

S.A. Solovyov, A.E. Inkov, A.A. Solovyova
Vologda State University

STEEL TRUSSES ELEMENTS RELIABILITY ANALYSIS BASED ON RANDOM VARIABLES INTERVAL ESTIMATION

The article presents a new approach to reliability analysis of planar steel trusses based on the information about the limits of variability of random variables. The use of a number of unsubstantiated hypotheses (about the type of distribution, the values of the parameters of the distribution, etc.) can lead to erroneous conclusions and mistakes. In the research, it is proposed to base only on interval estimates of the limits of variability of random variables. A numerical example of the truss bar's reliability analysis is given. In comparison with the classical approach (FOSM), assuming a normal distribution, the result of the reliability analysis turns out to be lower, which forms a certain margin of the reliability. The use of boundary values of the fields of variability of random variables makes it possible to assess the reliability of elements of steel trusses without assumptions about the form and shape of the probability distribution. Similarly, the inverse problem can be solved, for example, estimating the tolerances of the cross-sectional area of the bars during production, based on the requirements of a given reliability (failure probability).

Reliability, failure probability, interval estimation, convex sets, truss, probabilistic design.