



МЕХАНИЧЕСКИЕ РЕАКТАНСЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

В статье показано, что механические реактивная и полная мощности, развиваемые при гармонических колебаниях исполнительных органов машин и механизмов, напрямую связаны с их механическими реактансами, являющимися дуально-инверсными аналогами реактансов электрических цепей.

Привод, активная, реактивная, полная мощности, инертный, упругий реактансы.

Задача корректного учета как активной, так и реактивной механических мощностей для целей энергосбережения, а также силовых конструкторских расчетов является актуальной [1].

Пусть к массивному исполнительному органу машины или механизма приложена синусоидальная сила

$$f = F_m \cos \omega t. \quad (1)$$

В соответствии с основной аксиомой механики

$$F_m \cos \omega t = m \frac{dv}{dt},$$

$$\int_0^v dv = \frac{F_m}{m} \int_0^t \cos \omega t dt,$$

$$v = \frac{F_m}{\omega m} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Из этого следует, что амплитуда имеет вид:

$$V_m = \frac{F_m}{\omega m} = \frac{F_m}{X_m}.$$

Здесь X_m – инертный реактанс, кг · рад/с.

Полученное выражение можно представить в комплексном виде.

$$\dot{V} = -i \frac{\dot{F}}{\omega m} = \frac{\dot{F}}{i \omega m} = \frac{\dot{F}}{\underline{X}_m}. \quad (2)$$

Знак « \leftarrow » обусловлен тем, что фаза мгновенной скорости отстает от фазы силы на $\pi/2$. Комплексные величины, соответствующие синусоиде, обозначаются точкой сверху. Прочие – подчеркиваются снизу [2, 3].

В соответствии с (2) инертный реактанс равен

$$\underline{X}_m = i \omega m.$$

Он характеризует свойство массивного тела оказывать сопротивление приводу, понуждающему его совершать колебания. Вполне закономерно, что он определяется не только массой, но и частотой. В механику реактансы введены А.Г. Вебстером в начале XX века.

Дуально-инверсным аналогом формулы (2) является закон Ома для участка электрической цепи. При этом V соответствует току, F – ЭДС, X_m – индуктивному реактивному сопротивлению.

В соответствии с выражением (1) вектор силы ориентирован вдоль вещественной оси комплексной плоскости, поэтому в соответствии с формулой (2) вектор скорости ориентирован вдоль мнимой оси (т.е. скорость – чисто мнимая). Мгновенное значение реактивной (инерционной) мощности равно [4]

$$q_i = f v.$$

Эта величина является мнимой, поскольку является произведением мнимой величины v на действительную f .

Реактивная (инерционная) мощность в комплексном виде

$$\dot{Q}_i = \dot{F} \dot{V}. \quad (3)$$

В электротехнике величина реактивной мощности отождествляется с ее амплитудой [5]. Аналогично этому, учитывая (2), реактивная (инерционная) мощность равна

$$Q_i = \frac{F^2}{X_m} = V^2 X_m.$$

Пусть сила трения определяется формулой

$$f = r v,$$

где r – коэффициент пропорциональности, Н · с/м. Отсюда скорость равна

$$v = \frac{f}{r}.$$

Дуально-инверсным аналогом этой формулы является закон Ома для участка электрической цепи. При этом v соответствует току, f – ЭДС, r – активному сопротивлению. Поскольку вектор силы ориентирован вдоль вещественной оси комплексной

плоскости (1) и r – вещественная величина, величина V является тоже вещественной.

Мгновенное значение активной (тепловой) мощности равно [6]

$$p = fV.$$

Активная мощность тоже вещественная величина, поскольку является произведением вещественных величин.

Активная (тепловая) мощность в комплексном виде

$$\underline{P} = \dot{F} \dot{V}.$$

В электротехнике величина активной мощности отождествляется с ее средним за период значением. Это положение обобщается и на механическую активную (тепловую) мощность P .

В соответствии с (3) и (2) реактивная (инерционная) мощность представляет собой чисто мнимую величину

$$\dot{Q}_i = \dot{F} \dot{V} = -i \frac{(\dot{F})^2}{\omega m}.$$

Активная (тепловая) мощность при любом характере движения, например развиваемая силой трения скольжения, является вещественной величиной. В этой связи реактивная и активная мощности являются условно «ортогональными». Следовательно, полная механическая мощность определяется выражением

$$S = \sqrt{Q^2 + P^2}. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что формула упругого реактанса имеет вид:

$$\underline{X}_k = -i \frac{k}{\omega}.$$

здесь k коэффициент упругости, Н/м. \underline{X}_k соответствует емкостному реактивному сопротивлению в электротехнике.

Реактивная (упругодеформационная) мощность определяется выражением

$$Q_d = \frac{F^2}{X_k} = V^2 X_k.$$

Эта мощность обусловлена способностью упругого тела запасать и возвращать потенциальную энергию упругой деформации. Реактивная (упругодеформационная) мощность является чисто мнимой величиной. Ее знак противоположен знаку реактивной (инерционной) мощности.

Полная мощность также вычисляется по формуле (4).

В механической системе, состоящей из пружины и груза сумма реактансов равна

$$\underline{X} = \underline{X}_m + \underline{X}_k = i\omega_0 m - i \frac{k}{\omega_0}.$$

Если она равна нулю, возникает резонанс [7–10].

$$i\omega_0 m - i \frac{k}{\omega_0} = 0,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Активная и реактивная механические мощности, являясь условно «ортогональными», не складываются. Для полной мощности справедлив аналог теоремы Пифагора (точно так же, как в электротехнике). Инертный и упругий реактансы характеризуют свойства массивного и упругого тел оказывать сопротивление приводу, понуждающему их совершать колебания.

Литература

- Юрина, Е. А. Основные проблемы, связанные с энергосбережением, и возможные пути решения / Е. А. Юрина, Я. А. Куликова, Д. В. Пустовалов. – DOI: 10.51965/2076-7919 2021 2 1 144 // Вестник Волжского университета имени В. Н. Татищева. – 2021. – Т. 2, № 1 (47). – С. 144–149.
- Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем. Часть 1 / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2019. – № 4 (6). – С. 21–25.
- Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем. Часть 2 / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2020. – № 1 (7). – С. 27–32.
- Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности виброприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.
- Павлов, В. Д. Автокомпенсация реактивной мощности в электрических сетях / В. Д. Павлов. – DOI: 10.17516/1999-494X-0342 // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. – 2021. – Т. 14, № 6. – С. 684–688.
- Попов, И. П. Производительная мощность при сортировке сыпучих материалов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2020. – № 1 (7). – С. 70–72.
- Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
- Попов, И. П. Исследование вариантов и особенностей околорезонансных явлений в механических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2021. – № 1 (11). – С. 12–18.
- Попов, И. П. Инертная колебательная система из двух грузов для вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Технические науки. – 2020. – № 2 (8). – С. 10–12.
- Павлов, В. Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов / В. Д. Павлов. – DOI: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27 // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. – 2021. – № 1 (49). – С. 17–27.

I.P. Popov
Kurgan State University

**MECHANICAL REACTANCES AT HARMONIC VIBRATIONS
OF MACHINES AND MECHANISMS EXECUTIVE ELEMENTS**

The article shows that the mechanical reactive and total powers developed during harmonic oscillations of the executive elements of machines and mechanisms are directly related to their mechanical reactances, which are dual-inverse analogs of the reactances of electrical circuits.

Drive, active, reactive, full power, inert, elastic reactants.