УДК 624.046.5



С.А. Соловьев, А.Э. Иньков, А.А. Соловьева
Вологодский государственный университет

МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПО УСЛОВИЮ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В статье представлен новый подход к расчету изгибаемых элементов строительных конструкций по условию прочности при интервальной оценке случайных величин. Приведены примеры, когда при отсутствии необходимого объема статистических данных о случайных параметрах можно получить оценку границ их изменчивости в интервальной форме. Преимуществом такого подхода является возможность оперативной оценки надежности элемента на первой стадии расчета, а также наглядность в анализе надежности. Также данный метод может применяться при отсутствии необходимости проверки ряда статистических гипотез о принадлежности выборки конкретному распределению вероятностей. Приведен численный пример подбора сечения деревянного изгибаемого элемента по условию надежности. Предложенный метод расчета надежности можно использовать как при коррелированных, так и при независимых случайных величинах.

Надежность, прочность, вероятность отказа, изгибаемый элемент, интервальная оценка, нечеткие множества.

Надежность является одним из главных показателей качества и безопасности эксплуатации несущих элементов строительных конструкций. Надежность в совокупности с фактором экономических и неэкономических потерь являются базовыми параметрами для оценки риска, что позволяет выполнять требования Федерального Закона №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» в области обеспечения механической безопасности. Как указано в стандарте Eurocode 0 «Basis of structural design», надежность обычно выражается в вероятностных терминах.

Одной из основных проблем при оценке надежности в практических инженерных задачах является выбор и обоснование моделей описания случайных величин. Главной проблемой здесь выступает фактор неопределенности: недостаток статистических данных и погрешность статистических методов.

Как отмечено в исследовании [1], «неопределенности в свойствах материалов, геометрических размерах, нагрузках и других параметрах всегда неизбежны в инженерных конструктивных задачах. Вероятностные модели широко используются для описания неопределенностей, и они оказались очень эффективными в задачах структурной надежности. Тем не менее трудно оценить точные значения параметров, чтобы точно определить распределения вероятностей из-за неточной и недостаточной информации. Как только предположение о распределении вероятностей не выполняется, анализ структурной надежности становится сомнительным и бессмысленным».

Данный тезис подтверждает исследование [2], в котором подчеркнуто, что небольшие отклонения между принятыми параметрами функций распределения и их фактическими значениями могут привести к большим ошибкам в результатах анализа надежности. В [3] также отмечается, что часто бывает трудно получить достаточное количество экспериментальных образцов для практических инженерных задач для построения точных вероятностных распределений.

Для решения данной проблемы были предложены новые подходы к анализу статистических данных и оценке надежности на основе теории выпуклых множеств (convex sets) [2, 4, 5].

Методы и алгоритмы статистического анализа данных при ограниченной информации также актуальны в задачах неразрушающего контроля [6–9].

Как было отмечено выше, для многих случайных параметров могут быть получены интервальные оценки при использовании новых математических теорий анализа данных. Так, в исследовании [10] приводятся графики функций доверия и правдоподобия для распределения вероятностей снеговой нагрузки в г. Вологде (рис. 1).

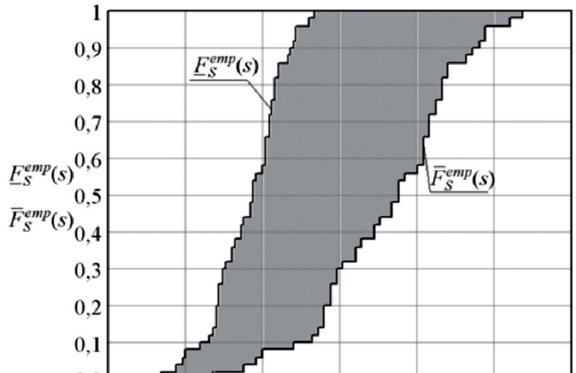

Рис. 1. Распределение вероятностей снеговой нагрузки в г. Вологде по эмпирическим данным метеостанции № 270370

Из рисунка 1 можно установить интервальную оценку снеговой нагрузки по результатам 50-летних наблюдений [0,4; 2,7] кПа. Такой подход учитывает интервальную неопределенность плотности снега: согласно п. 5.3 ГОСТ Р 53613-2009 «Воздействие природных внешних условий на технические изделия. Общая характеристика. Осадки и ветер», плотность слежавшегося снега изменяется в пределах от 200 до 400 кг/м^3. Также учитывается максимальная высота снегового покрова за отчетный год.

Рассмотрим еще один вариант получения оценки границ изменчивости случайной величины при наличии нескольких дискретных ее значений. В этом случае могут быть использованы треугольные или трапециевидные функции распределения возможностей из теории нечетких множеств [11]. Пусть случайная величина $\tilde{x}$ (или нечеткая переменная в терминах теории нечетких множеств) может быть описана треугольной функцией принадлежности $\mu_X(x) = \pi_X(x)$ с аналитическим видом: на интервале $x \in [X_{\min}; a_X]$ имеем: $\mu_X(x) = \dfrac{x(1-\alpha) + a_X\alpha - X_{\min}}{a_X - X_{\min}}$; на интервале $x \in [a_X; X_{\max}]$: $\mu_X(x) = \dfrac{X_{\max} - x(1-\alpha) - a_X\alpha}{X_{\max} - a_X}$, где $a_X = 0{,}5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$ – условное среднее; $X_{\max}$ и $X_{\min}$ – соответственно максимальное и минимальное значения в подмножестве значений $\{x\}$ нечеткой переменной $\tilde{x}$; $\alpha \in [0;1]$ – уровень среза (риска).

По результатам испытаний и при заданном уровне среза α можно графически (рис. 2) или аналитически установить интервал значений для нечеткой переменной $\tilde{x}$ или функции $X(\tilde{x})$. Аналитически границы интервала $\lfloor \underline{x};\ \overline{x} \rfloor$ определяются из условий $\dfrac{\underline{X}(1-\alpha) + a_X\alpha - X_{\min}}{a_X - X_{\min}} = 0$ и $\dfrac{X_{\max} - \overline{X}(1-\alpha) - a_X\alpha}{X_{\max} - a_X} = 0$ при известных значениях параметров нечеткой переменной X.

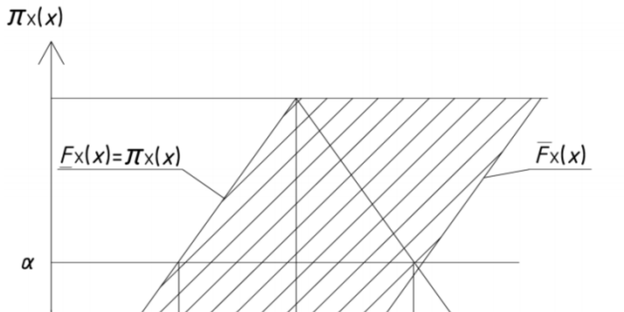

Рис. 2. Граничные функции распределения $\underline{F}_X(x)$ *и* $\overline{F}_X(x)$

Рассмотрим подход к оценке с использованием интервальных оценок на примере анализа надежности изгибаемой деревянной балки по критерию прочности нормальных сечений. Математическая модель предельного состояния для шарнирно-опертой однопролетной балки может быть записана в виде:

$$\tilde{q} \le \frac{4}{3}\frac{\tilde{\sigma}_{ult} b h^2}{l^2}, \tag{1}$$

где $\tilde{q}$ – равномерно распределенная нагрузка на элемент (случайная величина); $\tilde{\sigma}_{ult}$ – предельное допустимое напряжение при изгибе (случайная величина); l – пролет элемента; b – ширина сечения элемента; h – высота сечения элемента.

Равномерно распределенная нагрузка $\tilde{q}$ представляет собой сумму случайных величин (снеговая нагрузка, нагрузка от вышележащих конструкций, нагрузка от собственного веса и т.д.). Каждая из составляющих может быть описана различными видами распределений: как вероятностно-статистическими, так и интервальными или р-блоками [12]. В общем виде суммарную нагрузку легко представить в виде структуры Демпстера – Шефера. Подробно алгоритм формирования такого вида нагрузки приведен в исследовании [13]. И как было обозначено выше, в рамках структуры Демпстера – Шефера можно выделить границы изменчивости случайной величины по аналогии с рисунком 1.

Введем обозначения $\tilde{q} = X$, $\dfrac{4}{3}\dfrac{\tilde{\sigma}_{ult} b h^2}{l^2} = \tilde{q}_{ult} = Y$. В случайную величину $\tilde{q}_{ult}$ входит одна случайная величина $\tilde{\sigma}_{ult}$. Введем дополнительное обозначение для константы $\dfrac{4}{3}\dfrac{bh^2}{l^2} = C$. По правилам интервальной арифметики [1]:

$$C \cdot \tilde{\sigma}_{ult} = C \cdot \lfloor \underline{\sigma}_{ult};\ \overline{\sigma}_{ult} \rfloor = \lfloor C \cdot \underline{\sigma}_{ult};\ C \cdot \overline{\sigma}_{ult} \rfloor. \tag{2}$$

Данное выражение соответствует интервалу $\lfloor \underline{y};\ \overline{y} \rfloor$.

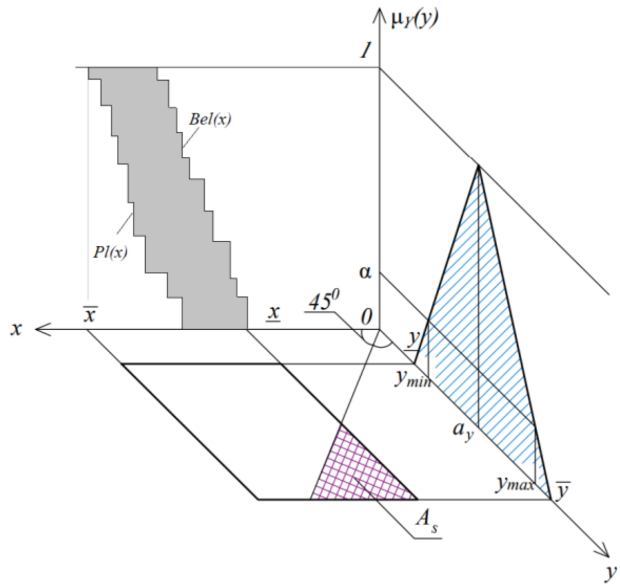

Рис. 3. Графический способ определения вероятности безотказной работы или вероятности отказа

Когда для функций $X(\tilde{x}_i)$ и $Y(\tilde{y}_j)$ сформированы интервалы $\lfloor \underline{x};\ \overline{x} \rfloor$ и $\lfloor \underline{y};\ \overline{y} \rfloor$, можно вычислить вероятность безотказной работы в графическом или аналитическом виде. В графическом виде вероятность безотказной работы определяется как отношение площади A_f к площади прямоугольника (рис. 3), образованного значениями $\left[\underline{x};\ \overline{x}\right]$ и $\left[\underline{y};\ \overline{y}\right]$. Или вероятность безотказной работы может быть вычислена аналитически в виде:

$$P=\Pr(X\le Y)=\frac{\int\limits_{\underline{y}}^{\overline{x}}dx\int\limits_{\underline{y}}^{x}dy}{\left(\overline{x}-\underline{x}\right)\left(\overline{y}-\underline{y}\right)}=\frac{A_s}{\left(\overline{x}-\underline{x}\right)\left(\overline{y}-\underline{y}\right)}. \qquad (3)$$

Рассмотрим численный пример оценки надежности деревянного изгибаемого элемента. Пусть элемент имеет прямоугольное поперечное сечение размерами 150×100 мм. Пролет составляет 3000 мм. Предельное допустимое напряжение при изгибе для рассматриваемой древесины определялось экспериментальным путем и составило интервал [10; 12] МПа.

Пусть по результатам сбора нагрузок с преобразованием в структуры Демпстера – Шефера [13] был получен интервал расчетной нагрузки $\left[\underline{x};\ \overline{x}\right]\in$ [2000; 3500] Н/м. Требуется оценить уровень надежности такого решения при отсутствии информации о распределении вероятностей случайных величин. Воспользовавшись уравнением (2), получим интервал изменчивости предельной равномерно-распределенной нагрузки для балки в виде $\left[\underline{y};\ \overline{y}\right]\in$ [3667; 4000] Н/м. Отложим данные значения интервалов в осях (рис. 4).

Общая площадь прямоугольника, формируемого ординатами границ интервалов, составит A=1 (кН/м)^2. Часть площади данного прямоугольника находится за линией границы предельного состояния. Площадь данного треугольника может быть найдена графически A_f=0,014 (кН/м)^2.

Исходя из определения вероятности безотказной работы по (3) можно вычислить:

$$P=(1-0{,}014)/1=0{,}986.$$

Предположим, что действительная нагрузка имеет нормальное распределение с параметрами: $m_X=2900$ Н/м, $S_X=250$ Н/м. Прочность древесины при изгибе пусть также подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $m_\sigma=11$ МПа, $S_\sigma=0{,}35$ МПа.

Как видно из статистических данных, доверительные границы интервала, образованные по правилу трех сигм, примерно соответствуют доверительным границам интервалов в примере.

На рисунке 5 представлено графическое отображение генерации 1000 случайных пар значений нагрузки на элемент и прочности древесины, полученных по указанным выше статистическим данным.

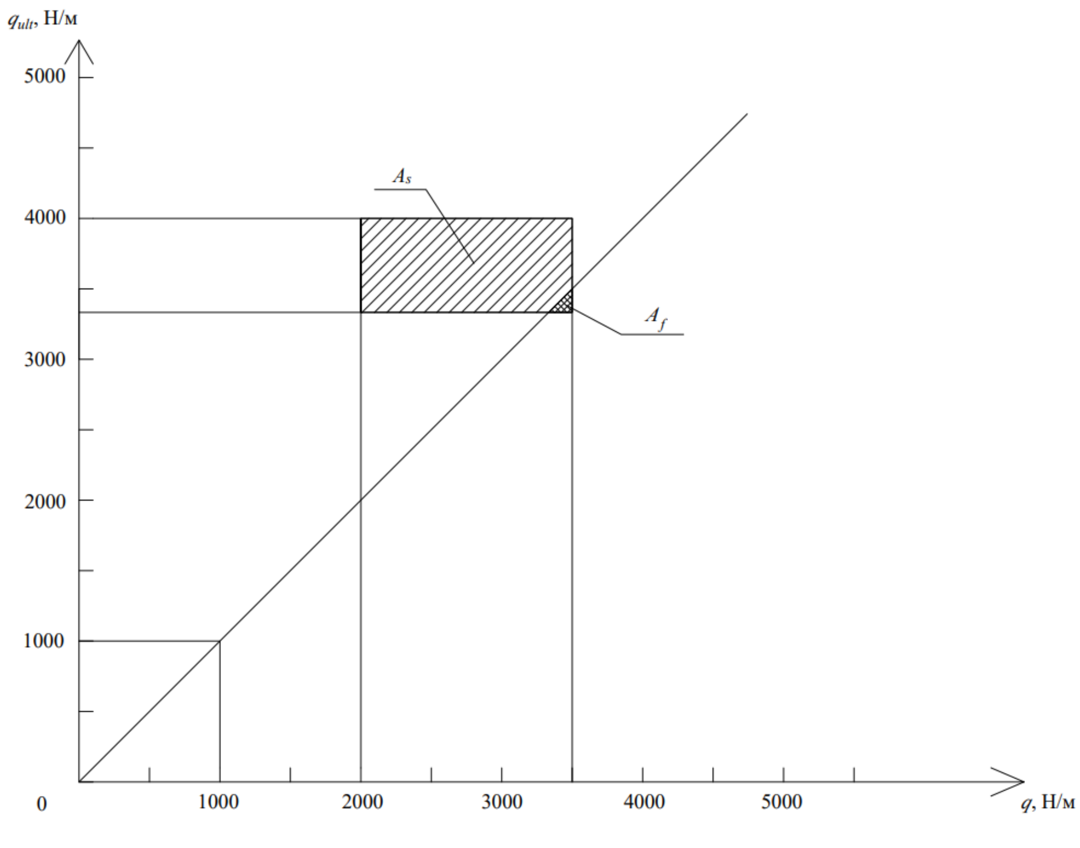

Рис. 4. Графический способ определения вероятности безотказной работы

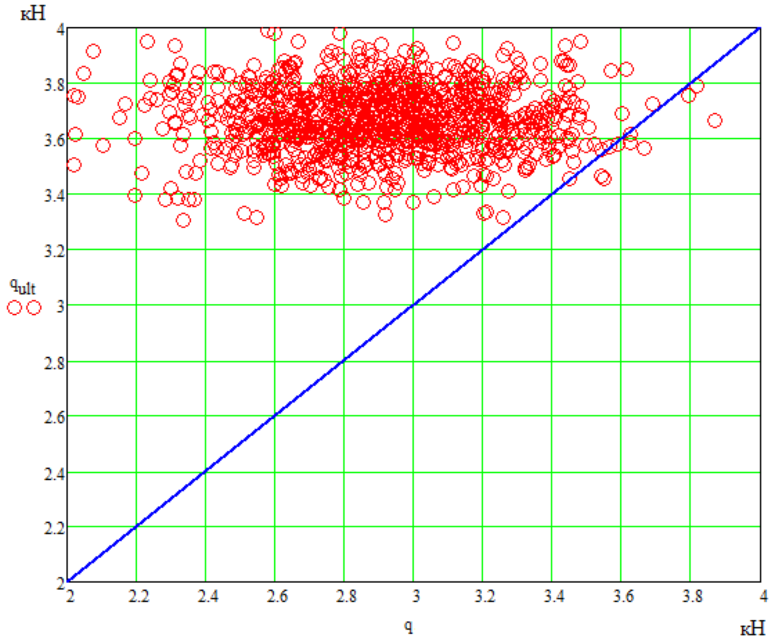

Рис. 5. Реализация 1000 парных значений нагрузки и предельной нагрузки на элемент

Как видно из рисунка 5, одиннадцать значений из результатов генерации пар случайных величин находятся за границей линии предельного состояния. Исходя из метода статистических испытаний [14], можно оценить надежность как (1000-11)/1000=0,989. Это значение очень близко к оценке надежности на основе предложенного подхода. Таким образом, предложенная методика оценки уровня надежности при наличии интервальных оценок случайных величин в расчетных математических моделях предельных состояний может быть использована на практике расчетов надежности в инженерных задачах.

Дополнительно можно рассмотреть вариант, в котором размеры поперечного сечения также являются случайными величинами с интервальными оценками. Тогда математическая модель предельного состояния запишется в виде:

$$\tilde{q} \le \frac{4}{3}\frac{\tilde{\sigma}_{ult}\tilde{b}\tilde{h}^2}{l^2}. \qquad (4)$$

Для правой части неравенства необходимо выполнить последовательное умножение случайных величин по правилам интервальной арифметики:

$$x^I \cdot y^I = \left[\underline{x};\ \overline{x}\right]\cdot\left[\underline{y};\ \overline{y}\right] =$$

$$= \left[\min\left\{\underline{x}\cdot\underline{y};\ \underline{x}\cdot\overline{y};\ \overline{x}\cdot\underline{y};\ \overline{x}\cdot\overline{y}\right\}\ \max\left\{\underline{x}\cdot\underline{y};\ \underline{x}\cdot\overline{y};\ \overline{x}\cdot\underline{y};\ \overline{x}\cdot\overline{y}\right\}\right]$$

После трех операций умножения можно будет получить общий интервал $\left[\underline{y};\ \overline{y}\right]$ для правой части неравенства, который будет характеризовать предельную допустимую нагрузку. Алгоритм дальнейшей оценки надежности останется прежним.

Одной из основных проблем при оценке надежности в практических инженерных задачах является выбор и обоснование моделей описания случайных величин. Допущения при выборе законов распределения случайных величин и оценке параметров распределений могут привести к большим ошибкам в результатах оценки надежности.

В статье предложен подход к расчету надежности изгибаемых элементов при наличии статистической информации только о границах изменчивости случайных величин. Приведены варианты оценки данных границ: использование теории нечетких множеств, теории свидетельств Демпстера – Шефера и др.

Решение примера на основе метода Монте-Карло показало близость результатов аналитического и численного подходов. Предложенная методика оценки уровня надежности при наличии интервальных оценок случайных величин в расчетных математических моделях предельных состояний может быть использована на практике расчетов надежности в инженерных задачах.

Литература

1. A nonprobabilistic set model of structural reliability based on satisfaction degree of interval / H. Z. Huang, Z. L. Wang, Y. F. Li [et al.] // Mechanika. – 2011. – Vol. 17(1). – P. 85–92.

2. Ben-Haim, Y. Convex Models of Uncertainties in Applied Mechanics / Y. Ben-Haim, I. Elishakoff. – Amsterdam : Elsevier, 1990. – 240 p.

3. A non-probabilistic structural reliability analysis method based on a multidimensional parallelepiped convex model / C. Jiang, Q. F. Zhang, X. Han [et al.] // Acta Mechanica. – 2014. – Vol. 225 (2). – P. 383–395.

4. Elishakoff, I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from AM Freudenthal's criticisms to modern convex modeling / I. Elishakoff // Computers & Structures. – 1995. – Vol. 56, No. 6. – P. 871–895.

5. Elishakoff, I. Discussion on: A non-probabilistic concept of reliability / I. Elishakoff // Structural Safety. – 1995. – Vol. 17(3). – P. 195–199.

6. Straub, D. Probabilistic modeling of non-destructive testing of steel structures / D. Straub // Proceedings 4th

International PhD Symposium in Civil Engineering, Munich. – 2002. – Vol. 2. – P. 311–320.

7. Zheng, R. Role of non-destructive evaluation in time-dependent reliability analysis / R. Zheng, B.R. Ellingwood // Structural Safety. – 1998. – Vol. 20, No. 4. – P. 325–339.

8. Karpov, D. F. Algorithm for integrated non-destructive diagnostics of technical condition of structures of buildings and constructions using the thermogram analysis / D. F. Karpov, A. A. Sinitsyn // E3S Web of Conferences : International Conference on Efficient Production and Processing, ICEPP 2020, Prague, 27–28 февраля 2020 года. – Prague : EDP Sciences, 2020. – P. 01040.

9. Карпов, Д. Ф. Комплексная энергосберегающая диагностика технического состояния ограждающих конструкций объектов капитального строительства и инженерных систем на основе теплового контроля / Д. Ф. Карпов, М. В. Павлов, А. А. Синицын // Энергосбережение и водоподготовка. – 2020. – № 2 (124). – С. 29–33.

10. Соловьева, А. А. Метод оценки надежности элементов плоских ферм на основе р-блоков / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 2. – С. 153–167.

11. Уткин, В. С. Расчет надежности основания фундамента, сложенного просадочными грунтами, по критерию деформации / В. С. Уткин, А. А. Каберова, С. А. Соловьев // Геотехника. – 2016. – № 3. – С. 18–25.

12. Соловьева, А. А. Исследование развития моделей случайных величин в расчетах надежности строительных конструкций при неполной статистической информации / А. А. Соловьева, С. А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, № 5. – С. 587–607.

13. Соловьев, С. А. Моделирование случайной статической нагрузки на покрытия сооружений при неполной статистической информации / С. А. Соловьев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 243–249.

14. Structural reliability analysis using Monte Carlo simulation and neural networks / J. B. Cardoso, J. R. de Almeida, J. M. Dias [et al.] // Advances in Engineering Software. – 2008. – Vol. 39 (6). – pp. 505–513.

S.A. Solovyev, A.E. Inkov, A.A. Solovyeva
Vologda State University

METHOD FOR ANALYSIS OF FLEXURAL STRUCTURAL ELEMENTS RELIABILITY ON THE STRENGTH CRITERIA WITH INTERVAL ESTIMATIONS OF RANDOM PARAMETERS

The article describes a new approach to the structural reliability analysis of flexural structural elements on the strength criteria with interval estimations of random parameters. The examples are given for the cases when in the absence of the necessary amount of statistical data for the random variables it is possible to estimate their variability boundaries in the interval form. The advantage of the proposed approach is the ability to quickly assess the reliability of the structural element at the first stage of design, as well as visibility in the reliability analysis. The proposed method can also be used if there is no need to test a number of statistical hypotheses about the sample belonging to a specific probability distribution function. A numerical example for wooden beam design according to the reliability level is given. The proposed method for reliability analysis can be used for both correlated and independent random variables.

Reliability, strength, failure probability, flexural element, interval estimation, fuzzy sets.