УДК 531.36

И.П. Попов
Курганский государственный университет

ПРИВЕДЕНИЕ В ДВИЖЕНИЕ МНОГОЗВЕННОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

В статье рассматривается схема соединения инертных элементов длинной кинематической цепи упругими связями, альтернативная широко применяемой в настоящее время на практике. Приводится доказательство преимущества предложенной схемы над существующей. Представлена методика расчета приведения в движение кинематической схемы в составе двух и трех составных элементов. На основании предложенной методики произведен динамический расчет на примере поезда в составе локомотива и одного или двух вагонов. Показано, что эффективность предложенной схемы тем выше, чем больше число ее секций. Результаты исследования могут использоваться при конструировании многозвенных транспортных средств.

Ускорение, энергия, масса, секция, локомотив, кинематическая цепь, колебания, демпфер.

Многозвенные кинематические цепи широко применяются на практике. Примером может служить железнодорожный состав, состоящий из локомотива и вагонов, режим трогания для которого представляет настолько серьезную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива [1, 2]. Эта проблема объясняется тем, что сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение поочередно и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны [3].

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа, и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда. Эти недостатки обусловливают актуальность работы.

Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки.

Целью работы является построение математической модели «легкого» трогания поезда с упругими сцепками.

Расчет механической системы в составе массивных локомотива, вагонов и упругих сцепок является достаточно громоздким [4]. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F, развиваемая локомотивом, – величина постоянная; массы локомотива и вагонов равны между собой и составляют m.

Два звена. Уравнение сил, приложенных к локомотиву, имеет вид

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2), \qquad (1)$$

где x_1, x_2 – перемещение, соответственно, локомотива и вагона, k – коэффициент упругости сцепки.

Силы, приложенные к вагону, удовлетворяют уравнению

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2)\cdot$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2. \qquad (2)$$

Подстановка этого выражения в (1) дает

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2}. \qquad (3)$$

Пусть $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = z. \qquad (4)$$

Тогда (3) запишется в виде

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2}. \qquad (5)$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0.$$

Его корни равны

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}\cdot$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения –

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t\cdot$$

Частное решение в соответствии с (5) имеет вид

$$z_2 = A\cdot$$

Подстановка его в (5) дает

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2},\ A = \frac{F}{2m}\cdot$$

Общее решение уравнения (5) находится как

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cdot$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на вагон сила не действует и величина

(4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид

$$z(0)=0=C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0+C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0+\frac{F}{2m},\ C_1=-\frac{F}{2m}.$$

С учетом этого

$$z=-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}. \qquad (6)$$

В соответствии с (4)

$$v_2=\int zdt=-\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$x_2=\int v_2dt=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4. \qquad (7)$$

С учетом (2), (4), (6) и (7)

$$x_1=-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2k}+\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4,$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=\frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}=\frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}.$$

$$x_2(0)=0=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0+\frac{F}{4m}0^2+C_3 0+C_4,$$

$$\frac{F}{4k}+C_4=0,\ C_4=-\frac{F}{4k}.$$

$$v_2(0)=0=-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3,$$

$$v_1(0)=0=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3,$$

$$\begin{cases}-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3=0 \\ C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3=0\end{cases},\ C_2=0,\quad C_3=0.$$

Окончательное решение:

$$x_1=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+\frac{F}{4k},\ x_2=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2-\frac{F}{4k},$$

$$v_1=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,\ v_2=-\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$a_1=\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m},\ a_2=-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}.$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс «$_2$» означает количество составных частей поезда) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_2)-\frac{F}{2m}=0 \text{ или } \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2=0,$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2=\frac{\pi}{2},\ \tau_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

За время τ_2 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_2)=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}+\frac{F}{4k}=\frac{F\pi^2}{32k}+\frac{F}{4k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_2)=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{F}{2\sqrt{2km}}+\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава:

$$a=\frac{F}{2m},\ v=\frac{F}{2m}t,\ x=\frac{F}{4m}t^2,$$

$$x(\tau_2)=\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}=\frac{F\pi^2}{32k},\ v(\tau_2)=\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)}=\frac{F\pi^2/(32k)+F/(4k)}{F\pi^2/(32k)}=1+\frac{32}{4\pi^2}\approx 1{,}81.$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)}=\frac{F/(2\sqrt{2km})+F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})}=1+\frac{2}{\pi}\approx 1{,}64.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)}=2{,}69.$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого.

Три звена. Уравнения сил, приложенных, соответственно, к локомотиву и вагонам, имеют вид

$$F=m\frac{d^2x_1}{dt^2}+k(x_1-x_2), \qquad (8)$$

$$k(x_1-x_2)=m\frac{d^2x_2}{dt^2}+k(x_2-x_3), \qquad (9)$$

$$k(x_2-x_3)=m\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_2=\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3. \qquad (10)$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка последних двух выражений в (9) дает

$$x_1=\frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2-x_3=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2x_3-x_3=$$

$$=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3. \qquad (11)$$

Производная этого выражения равна

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка полученных выражений в (8) дает

$$\frac{F}{k}=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3-\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}-x_3=$$

$$=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2},$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (12)$$

Пусть
$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=z. \qquad (13)$$

Тогда (12) запишется в виде

$$z''''+4\frac{k}{m}z''+3\frac{k^2}{m^2}z=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (14)$$

Характеристическое уравнение –

$$r^4+4\frac{k}{m}r^2+3\frac{k^2}{m^2}=0.$$

$$r_{1,2}^2=-2\frac{k}{m}\pm\frac{k}{m}=,\ r_1^2=-3\frac{k}{m},\ r_2^2=-\frac{k}{m},$$

$$r_{1,2}=\pm i\sqrt{3\frac{k}{m}},\ r_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения –

$$z_1=C_1\cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение имеет вид

$$z_2=A.$$

Подстановка его в (14) дает

$$3\frac{k^2}{m^2}A=\frac{k^2F}{m^3},\ A=\frac{F}{3m}.$$

Общее решение находится как

$$z=z_1+z_2=C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}. \quad (15)$$

В соответствии с (13)

$$v_3=\int z\,dt=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$
$$+C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \quad (16)$$

$$x_3=\int v_3\,dt=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$
$$-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6. \quad (17)$$

С учетом (10), (13), (15) и (17)

$$x_2=\frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}\frac{F}{3m}-$$
$$-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-$$
$$-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6=$$
$$=\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6, \quad (18)$$

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=-\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5=$$
$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5, \quad (19)$$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-2C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}, \quad (20)$$

С учетом (11), (20), (18) и (17)

$$x_1=-2C_1\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}\frac{m}{k}+$$
$$+2\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+2\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2F}{3k}+\frac{2F}{6m}t^2+2C_5t+2C_6-$$
$$+C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$
$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{F}{6m}t^2-C_5t-C_6=$$
$$=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$
$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6,$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$
$$+C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5. \quad (21)$$

$$a_1=C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}.$$

В соответствии с (20)

$$a_2(0)=-2C_1+\frac{F}{3m}=0,\ C_1=\frac{F}{6m}.$$

В соответствии с (15)

$$z(0)=0=\frac{F}{6m}+C_3+\frac{F}{3m},\ C_3=-\frac{F}{2m}.$$

В соответствии с (18)

$$x_2(0)=\frac{2m}{3k}C_1+\frac{F}{3k}+C_6=0,\ \frac{F}{9k}+\frac{F}{3k}+C_6=0,\ C_6=-\frac{4F}{9k}.$$

В соответствии с (21), (16) и (19)

$$v_1(0)=-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}+C_4\sqrt{\frac{m}{k}}+C_5=0,$$

$$v_3(0)=-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}-C_4\sqrt{\frac{m}{k}}+C_5=0,\ C_4=0,$$

$$v_2(0)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2+C_5=0,\ C_2=0,\ C_5=0.$$

Окончательное решение:

$$x_1=-\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+\frac{5F}{9k},$$

$$x_2=\frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2-\frac{F}{9k},$$

$$x_3=-\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2-\frac{4F}{9k},$$

$$v_1=\frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t,$$

$$v_2=-\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t,$$

$$v_3=\frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-\frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t,$$

$$a_1=\frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m},$$

$$a_2=-\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m},$$

$$a_3=\frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}.$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом

$$a_1(\tau_3)-\frac{F}{3m}=0 \text{ или } \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3+\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3=0,$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3+\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3=0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,427\pi, \ \tau_3 = 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

За время τ_3 локомотив пройдет расстояние

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + $$

$$+\frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$=\frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}\left(0,427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] =$$

$$=\frac{F}{k}\left[-\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}\left(0,427\pi\right)^2 + \frac{5}{9}\right] = 0,78\frac{F}{k}$$

и разовьет скорость

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$=\frac{F}{\sqrt{km}}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\cdot 0,427\pi + \frac{1}{2}\sin 0,427\pi + \frac{1}{3}0,427\pi\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава.

$$a = \frac{F}{3m}, \ v = \frac{F}{3m}t, \ x = \frac{F}{6m}t^2,$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0,3\frac{F}{k},$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,45\frac{F}{\sqrt{mk}}.$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2,6, \ \frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2,22.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4,93.$$

Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжелого поезда.

В таблицу сведены перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесенные к соответствующим параметрам недеформируемого состава.

Таблица

Приведенные перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива

Количество секций поезда	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1,81	1,64	2,69
3	2,6	2,22	4,93

Полученные соотношения наглядно свидетельствуют о том, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого над вторым.

Смягчение режима трогания состава по существу обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочередное. Выше этот процесс описан для инерционных сил. Применительно к силе трения покоя механизм будет подобным, т.е. преодолевается не вся сила трения покоя одновременно, а поочередно преодолеваются ее малые части.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений локомотива и вагонов имеют гармонические составляющие. Для исключения продольных колебаний состава [5–7] после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность ее гармонического сжатия [8–10] с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств.

Литература

1. Коссов, Е. Е. К вопросу совершенствования методов имитации поездной работы маневрового тепловоза / Е. Е. Коссов, И. А. Кузнецова // Вестник научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2013. – № 1. – С. 22–26.
2. Попов, И. П. Математическая модель искусственной электрической емкости для снижения пиковой нагрузки маневрового тепловоза / И. П. Попов. – DOI: 10.15593/2499-9873/2019.3.03 // Прикладная математика и вопросы управления. – 2019. – № 3. – С. 57–64.
3. Попов, И. П. Сглаживание нагрузки маневрового тепловоза / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 19–21.
4. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
5. Попов, И. П. Инертная колебательная система из двух грузов для вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 2 (8). – С. 10–12.
6. Попов, И. П. Использование инертного триплетного маятника в вибрационных сортировальных машинах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 11–13.
7. Попов, И. П. Построение вибрационных сортировальных машин по схеме мультиинертного осциллятора / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 14–17.
8. Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности вибоприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.
9. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 4 (6). – Ч. 1. – С. 21–25.
10. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 1 (7). – Ч. 2. – С. 27–32.

I.P. Popov
Kurgan State University

DRIVING A MULTI-LINK KINEMATIC CHAIN WITH ELASTIC LINKS

The article discusses a scheme for connecting inert elements of a long kinematic chain with elastic links, an alternative to the one widely used in practice. The proof of the advantages of the proposed scheme over the existing one is given. The method of calculating the driving of the kinematic scheme in the composition of two and three components is presented. On the basis of the proposed methodology, a dynamic calculation was performed using the example of a train consisting of a locomotive and one or two cars. It is shown that the higher the number of its sections, the higher the efficiency of the proposed scheme. The research results can be used in the design of multi-link vehicles.

Acceleration, energy, mass, section, locomotive, kinematic circuit, oscillations, damper.