



## ИССЛЕДОВАНИЕ ВАРИАНТОВ И ОСОБЕННОСТЕЙ ОКОЛОРЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Представлено исследование механических систем в резонансных и околорезонансных режимах. Рассмотрены параллельное и последовательное соединения элементов механической системы с источником силы либо источником скорости в качестве источника внешнего механического гармонического воздействия. Предложен упрощенный метод моделирования вынужденных колебаний с использованием символического (комплексного) метода, позволяющего существенно повысить продуктивность, упростить и формализовать математические преобразования. Установлено, что вопреки классическому подходу резонансная частота не сдвигается от частоты свободных колебаний.

Реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс.

В установившемся режиме при гармонических воздействиях удобно использовать комплексное представление величин [1, 2]. При этом символический (комплексный) метод существенно упрощает исследование резонансных и околорезонансных явлений [3–6]. В отличие от классического метода здесь не возникает необходимость в составлении и решении дифференциальных уравнений [7–9].

Целью исследования является исследование вариантов и особенностей околорезонансных явлений в механических системах.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах.

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \left[ A e^{i(\omega t + \varphi)} \right],$$

где  $A e^{i(\omega t + \varphi)}$  – вращающийся в комплексной плоскости вектор,  $\omega$  – циклическая частота,  $\varphi$  – начальная фаза.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина  $A e^{i(\omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} = \dot{A}$  называется комплексной амплитудой.

В основе исследования механических систем лежит дуально-инверсный аналог закона Ома для участка электрической цепи:

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \dot{F} \underline{y}, \quad (1)$$

где  $\dot{V}$  и  $\dot{F}$  – комплексные амплитуды скорости и силы,  $\underline{z}$  и  $\underline{y}$  – механические импеданс и адмитанс в комплексном представлении [1, 2].

Далее рассматриваются параллельное (рис. 1) и последовательное (рис. 2) соединения элементов механической системы [9].

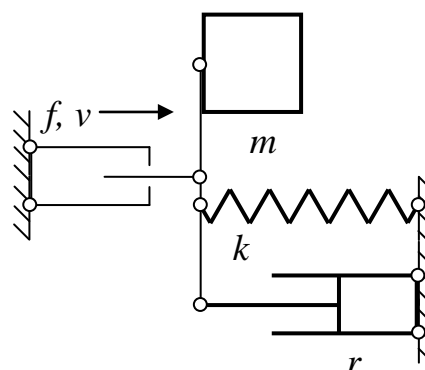


Рис. 1. Параллельное соединение

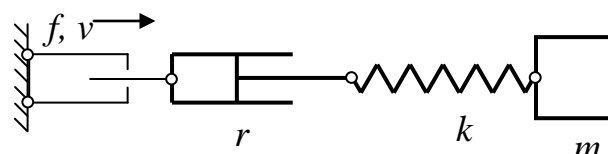


Рис. 2. Последовательное соединение

Аналитические описания резонанса в курсах теоретической механики соответствуют параллельному соединению.

Источниками внешнего механического гармонического воздействия на систему выступают либо источник силы, либо источник скорости [1, 2].

Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания [9].

Источник силы характеризуется комплексной амплитудой силы:

$$\dot{F} = F e^{i0}. \quad (2)$$

Источник скорости характеризуется комплексной амплитудой скорости:

$$\dot{V} = Ve^{i0}. \quad (3)$$

Механические гармонические воздействия, описываемые в курсах теоретической механики, соответствуют источнику силы.

Параллельное соединение характеризуется следующими величинами [1, 2].

Инертный реактанс –

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i\pi/2} = x_m e^{i\pi/2}, \quad (4)$$

где  $m$  – масса.

Упругий реактанс –

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\pi/2} = x_k e^{-i\pi/2}, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент упругости.

Механический резистанс –

$$\underline{r} = r e^{i0} = r,$$

где  $r$  – коэффициент вязкого сопротивления.

Механический импеданс –

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi}, \quad (6)$$

где  $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{x_m - x_k}{r}$ .

Последовательное соединение характеризуется следующими величинами [там же].

Инертный сассептанс –

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\pi/2} = b_m e^{-i\pi/2}. \quad (7)$$

Упругий сассептанс –

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\pi/2} = b_k e^{i\pi/2}. \quad (8)$$

Механический кондактанс –

$$\underline{g} = g e^{i0} = g.$$

Для элемента (инертного, упругого, резистивного), рассматриваемого вне связи с другими механическими элементами,  $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$ ,  $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$ ,  $\underline{g} = 1/\underline{r}$ . В системе, включающей несколько элементов, соотношения иные [2].

Механический адмитанс –

$$\underline{y} = Ye^{i\varphi}, \quad (9)$$

где  $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g}$ .

## 1. Параллельное соединение и источник силы. Резонанс сил.

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) –

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi} = Ve^{-i\varphi}. \quad (10)$$

Комплексная амплитуда инертной силы –

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = x_m Ve^{i(\pi/2-\varphi)} = F_m e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (11)$$

Комплексная амплитуда упругой силы –

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = x_k Ve^{-i(\pi/2+\varphi)} = F_k e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (12)$$

Комплексная амплитуда резистивной силы –

$$\dot{F}_r = \underline{r} \dot{V} = r Ve^{-i\varphi} = F_r e^{-i\varphi}. \quad (13)$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}. \quad (14)$$

Из закона Гука, (12) и (5) следует выражение для комплексной амплитуды отклонения –

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k Ve^{-i(\pi/2+\varphi)}}{k} = \frac{kVe^{-i(\pi/2+\varphi)}}{\omega k} = \\ &= \frac{V}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = Xe^{-i(\pi/2+\varphi)} \end{aligned} \quad (15)$$

Из второго закона Ньютона, (11) и (4) следует выражение для комплексной амплитуды ускорения –

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m Ve^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \frac{\omega m Ve^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \\ &= \omega Ve^{i(\pi/2-\varphi)} = Ae^{i(\pi/2-\varphi)} \end{aligned} \quad (16)$$

Разумеется,  $A = \omega V = \omega^2 X$ .

Из (10)–(16) и (4)–(6) следуют амплитудно-частотные характеристики:

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \frac{kF}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \\ X(\omega) &= \frac{F}{\omega \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \end{aligned}$$

$$F_r(\omega) = \frac{rF}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad V(\omega) = \frac{F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad (17)$$

$$F_m(\omega) = \frac{\omega m F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \quad A(\omega) = \frac{\omega F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}. \quad (18)$$

Разумеется,

$$F = \sqrt{F_r^2 + (F_k - F_m)^2}. \quad (19)$$

Графики функций  $X(\omega)$ ,  $V(\omega)$ ,  $A(\omega)$  ведут себя качественно так же, как, соответственно,  $F_k(\omega)$ ,  $F_r(\omega)$ ,  $F_m(\omega)$ .

Частота  $\omega_k$ , на которой функции  $X(\omega)$  и  $F_k(\omega)$  имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[ (k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - r^2/(2km)} = \omega_0 \sqrt{1 - r^2/(2x_w^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2/2},$$

где  $x_w = \sqrt{km}$  – волновое сопротивление (системы),  $d = r/x_w$  – затухание (системы) (по аналогии с электротехникой).

$$F_{k_{\max}} = F_k(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} F,$$

$$X_{\max} = X(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{k} = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} X_0,$$

где  $Q = 1/d$  – добротность (системы) (по аналогии с электротехникой),  $X_0 = X(0) = F/k$  – статическое отклонение.

Частота  $\omega_r$ , на которой функции  $V(\omega)$  и  $F_r(\omega)$  имеют максимум, очевидным образом равна  $\omega_r = \sqrt{k/m} = \omega_0$ .

$$F_{r\max} = F_r(\omega_0) = F, V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F}{r}. \quad (20)$$

Частота  $\omega_m$ , на которой функции  $A(\omega)$  и  $F_m(\omega)$  имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[ (k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2/(2km)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-d^2/2}}. \quad (21)$$

$$F_{m\max} = F_m(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad (22)$$

$$A_{\max} = A(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} \frac{F}{m} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/4}} A_0,$$

где  $A_0 = A(0) = F/m$  – постоянное ускорение (при нулевой частоте).

При  $d^2/2 > 1$  функции  $X(\omega)$ ,  $A(\omega)$ ,  $F_k(\omega)$ ,  $F_m(\omega)$  не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что

$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2, \quad (23)$$

$$F_{k\max} = F_{m\max}, \quad (24)$$

$$A_{\max} = \omega_0^2 X_{\max}, \quad (25)$$

$$\frac{A_{\max}}{\omega_m} = \omega_k X_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{1-d^2/4}}. \quad (26)$$

Другие характерные точки:

$$F_m(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad A(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} A_0, \quad (27)$$

$$F_k(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F, \quad X(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} X_0, \quad (28)$$

$$F_m(\omega_0) = QF, \quad A(\omega_0) = QA_0, \quad F_k(\omega_0) = QF, \\ X(\omega_0) = QX_0, \quad (29)$$

$$F_r(\omega_k) = F_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} F,$$

$$V(\omega_k) = V(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} \frac{F}{r} = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} V(\omega_0). \quad (30)$$

Характерные отношения:

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_m(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_k(\omega_k)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_m(\omega_k)} = \quad (31)$$

$$= \frac{X(\omega_k)}{X(\omega_m)} = \frac{A(\omega_m)}{A(\omega_k)} = \frac{1}{1-d^2/2},$$

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/2}}, \quad (32)$$

$$\frac{F_k(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = Q\sqrt{1-d^2/2}. \quad (33)$$

На рисунке 3 представлены подлинные резонансные кривые для системы с параметрами:  $F = 100$  Н,  $m = 10$  кг,  $k = 40$  кг·с<sup>-2</sup>,  $r = 10$  кг·с<sup>-1</sup>.

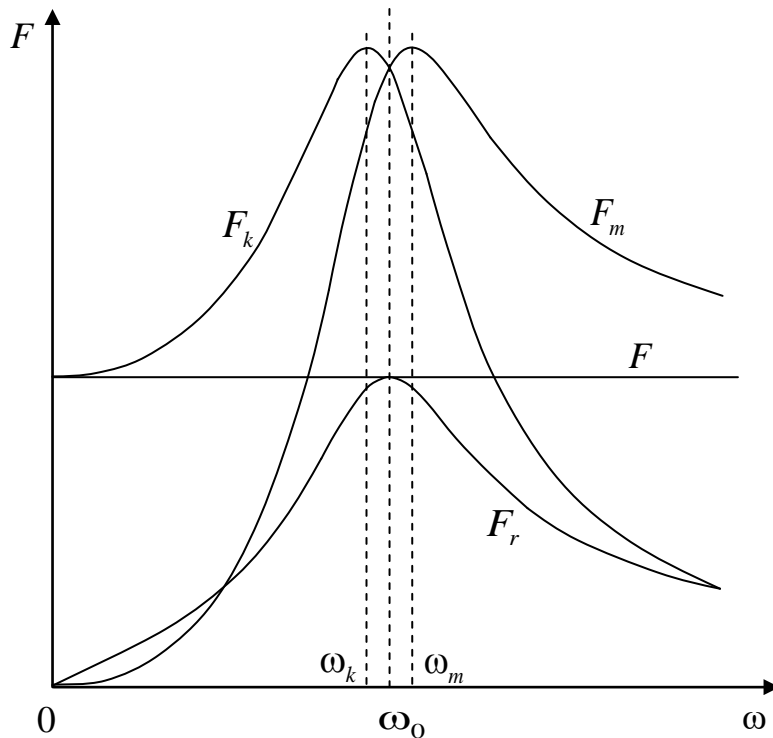


Рис. 3. Резонанс сил

На том основании, что амплитуда отклонения  $X$  имеет максимум на частоте  $\Omega_k$  ( $\Omega_k < \Omega_0$ ), она ( $\Omega_k$ , а не  $\Omega_0$ ) считается резонансной частотой [10].

Это было бы сильным решением, если бы  $X$  был единственным значимым кинематическим параметром. Однако не менее значимыми параметрами являются амплитуды скорости  $V$  и ускорения  $A$ . При этом первая имеет максимум на частоте  $\Omega_0$ , а вторая – на частоте  $\Omega_m$  ( $\Omega_m > \Omega_0$ ). Таким образом,  $\Omega_k$  ничем не лучше, чем  $\Omega_0$  и  $\Omega_m$ . Единственным аргументом при выборе резонансной частоты остается соображение симметрии (усиленное выражением (23)), в соответствии с которым резонансная частота –  $\Omega_0$ .

Этот выбор становится еще более очевидным, если обратиться к силам.

Амплитуда упругой силы  $F_k$  имеет максимум на частоте  $\Omega_k$ , амплитуда инертной силы  $F_m$  – на частоте  $\Omega_m$ . Отдать предпочтение той или другой частоте невозможно. Однако именно на частоте  $\Omega_0$  имеет место резонанс сил, при котором реактивные силы  $F_k$  и  $F_m$  равны и противоположны, а их сумма соответственно равна нулю [9].

Кроме того, величина импеданса механической системы  $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$ , характеризующего ее свойство оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, на частоте  $\Omega_0$  имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте  $\Omega_0$  система оказывает приводу минимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно  $\omega_0$ .

С другой стороны, имея в виду рисунок 3, можно вести речь о трех резонансных частотах:  $\Omega_k$ ,  $\Omega_m$  и  $\Omega_0$ . На первой имеет место резонанс упругой силы, на второй – резонанс инертной силы, на третьей – резонанс резистивной силы.

## 2. Параллельное соединение и источник скорости. Антирезонанс сил.

Комплексная амплитуда инертной силы –

$$\dot{F}_m = \dot{x}_m \dot{V} = x_m V e^{i\pi/2} = F_m e^{i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда упругой силы –

$$\dot{F}_k = \dot{x}_k \dot{V} = x_k V e^{-i\pi/2} = F_k e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда резистивной силы –

$$\dot{F}_r = \dot{r} \dot{V} = r V e^{i0} = F_r e^{i0}.$$

Разумеется,  $\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}$ .

Комплексная амплитуда отклонения –

$$\dot{X} = \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i\pi/2}}{k} = \frac{k V e^{-i\pi/2}}{\omega k} = \frac{V}{\omega} e^{-i\pi/2} = X e^{-i\pi/2} \quad (34)$$

Комплексная амплитуда ускорения –

$$\dot{A} = \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i\pi/2}}{m} = \frac{\omega m V e^{i\pi/2}}{m} = \omega V e^{i\pi/2} = A e^{i\pi/2} \quad (35)$$

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) –

$$\dot{F} = \dot{V} \dot{z} = V z e^{i\varphi} = F e^{i\varphi}.$$

Амплитудно-частотная характеристика –

$$F(\omega) = V \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  кривая  $F(\omega)$  устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (3) порождает чрезмерные деформации упругого элемента (34), сопровождаемые соответственно чрезмерными силами упругости. При сверхвысоких частотах условие (3) порождает чрезмерные ускорения (35) и чрезмерные инерционные силы.

При  $\Omega_0$  график проходит через минимум  $F_{\min} = F(\omega_0) = Vr = F_r$ . Имеет место антирезонанс сил, при котором реактивные силы  $F_k$  и  $F_m$  равны и противоположны, а их сумма соответственно равна нулю.

Для антирезонанса разночтений со смещением антирезонансной частоты (она же резонансная) не возникает.

На рисунке 4 представлена подлинная антирезонансная кривая для системы, отличающейся от первой тем, что  $V = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ .

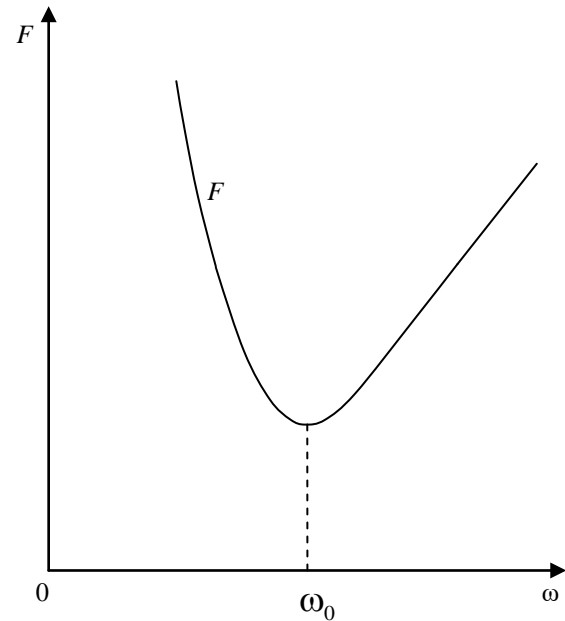


Рис. 4. Антирезонанс сил

## 3. Последовательное соединение и источник скорости. Резонанс скоростей.

Порядок рассуждений такой же, как в п. 1.

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) –

$$\dot{F} = \frac{\dot{V}}{y} = \frac{V}{y} e^{-i\varphi} = F e^{-i\varphi} \quad (36)$$

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента –

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = V_m e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (37)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента –

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = V_k e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (38)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента –

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{-i\varphi} = V_r e^{-i\varphi}. \quad (39)$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}. \quad (40)$$

Из (37) следует выражение для комплексной амплитуды импульса –

$$\begin{aligned} \dot{P} &= m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = m \frac{1}{\omega m} F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = \\ &= \frac{F}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = P e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \end{aligned} \quad (41)$$

Из (38) следует выражение для комплексной амплитуды производной силы (специального названия не имеет, приводится здесь как дуальный аналог преобразования (16)) –

$$\begin{aligned} \dot{B} &= k \dot{V}_k = k b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = k \frac{\omega}{k} F e^{i(\pi/2-\varphi)} = \\ &= \omega F e^{i(\pi/2-\varphi)} = B e^{i(\pi/2-\varphi)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Это соответствует преобразованию

$$kv = k \frac{dx}{dt} = \frac{d(kx)}{dt} = \frac{dF}{dt} = B. \quad (43)$$

Разумеется,

$$B = \omega F = \omega^2 P. \quad (44)$$

Из (36)–(42) и (7)–(9) следуют амплитудно-частотные характеристики:

$$V_m(\omega) = \frac{V}{\omega m \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (45)$$

$$P(\omega) = \frac{V}{\omega \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}},$$

$$V_r(\omega) = \frac{gV}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (46)$$

$$F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}},$$

$$V_k(\omega) = \frac{\omega V}{k \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}, \quad (47)$$

$$B(\omega) = \frac{\omega V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}.$$

Разумеется,

$$V = \sqrt{V_r^2 + (V_k - V_m)^2}. \quad (48)$$

Графики функций  $P(\omega)$ ,  $F(\omega)$ ,  $B(\omega)$  ведут себя качественно так же, как, соответственно,  $V_m(\omega)$ ,  $V_r(\omega)$ ,  $V_k(\omega)$ .

Частота  $\omega_m$ , на которой функции  $P(\omega)$  и  $V_m(\omega)$  имеют максимум, определяется из условия:

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega^{-1} \left[ (k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - mk/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - x_w^2/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^2/2}. \quad (49)$$

$$V_{m \max} = V_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad (50)$$

$$P_{m \max} = P_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V m = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0,$$

где  $P_0 = P(0) = Vm$  – постоянный импульс (при нулевой частоте).

Частота  $\omega_r$ , на которой функции  $F(\omega)$  и  $V_r(\omega)$  имеют максимум, очевидным образом равна

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0.$$

$$V_{r \max} = V_r(\omega_0) = V, \quad F_{\max} = F(\omega_0) = \frac{V}{g}. \quad (51)$$

Частота  $\omega_k$ , на которой функции  $B(\omega)$  и  $V_k(\omega)$  имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \omega \left[ (k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2} \right]^{-1/2} \right\} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - km/(2r^2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - Q^2/2}}. \quad (52)$$

$$V_{k \max} = V_k(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V, \quad (53)$$

$$B_{\max} = B(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V k = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} B_0,$$

где  $B_0 = B(0) = Vk$  – постоянная производная силы (при нулевой частоте).

При  $Q^2/2 > 1$  функции  $P(\omega)$ ,  $B(\omega)$ ,  $V_m(\omega)$ ,  $V_k(\omega)$  не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот.

Примечательно, что

$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2, \quad (54)$$

$$V_{k \max} = V_{m \max}, \quad (55)$$

$$B_{\max} = \omega_0^2 P_{\max}, \quad (56)$$

$$\frac{B_{\max}}{\omega_k} = \omega_m P_{\max} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{1 - Q^2/4}}. \quad (57)$$

Другие характерные точки:

$$V_m(\omega_k) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}}V, \quad P(\omega_k) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}}P_0, \quad (58)$$

$$V_k(\omega_m) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}}V, \quad B(\omega_m) = \frac{d-Q/2}{\sqrt{1-Q^2/4}}B_0, \quad (59)$$

$$V_m(\omega_0) = d \cdot V, \quad P(\omega_0) = d \cdot P_0, \quad V_k(\omega_0) = d \cdot V, \\ B(\omega_0) = d \cdot B_0, \quad (60)$$

$$V_r(\omega_k) = V_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}}V, \\ F(\omega_k) = F(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}} \frac{V}{g} = \frac{\sqrt{1-Q^2/2}}{\sqrt{1-Q^2/4}}F(\omega_0). \quad (61)$$

Характерные отношения:

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_m(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_k(\omega_k)}{V_m(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_m(\omega_k)} = \\ = \frac{P(\omega_m)}{P(\omega_k)} = \frac{B(\omega_k)}{B(\omega_m)} = \frac{1}{1-d^2/2}, \quad (62)$$

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/2}}, \quad (63)$$

$$\frac{V_k(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = d\sqrt{1-Q^2/2}. \quad (64)$$

Амплитуда импульса  $P$  имеет максимум на частоте  $\omega_m$  ( $\omega_m < \omega_0$ ), амплитуда силы  $F$  – на частоте  $\omega_0$ , амплитуда производной силы  $B$  – на частоте  $\omega_k$  ( $\omega_k > \omega_0$ ).

Амплитуда скорости инертного элемента  $V_m$  имеет максимум на частоте  $\omega_m$ , амплитуда скорости изменения длины упругого элемента  $V_k$  – на частоте  $\omega_k$ .

На частоте  $\omega_0$  имеет место резонанс скоростей, при котором (реактивные) скорости  $V_m$  и  $V_k$  равны и противоположны, а их сумма соответственно равна нулю [9].

Величина адмитанса механической системы  $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$ , характеризующего ее свойство не оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, на частоте  $\omega_0$  имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте  $\omega_0$  система оказывает приводу максимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно  $\omega_0$ .

Для системы с параметрами, отличающимися от параметров второй тем, что  $\gamma = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$ , подлинные резонансные кривые полностью совпадают с изображенными на рисунке 3 при заменах  $F_k \rightarrow V_m$ ,  $F_m \rightarrow V_k$ ,  $F_r \rightarrow V_r$ ,  $\omega_k \rightarrow \omega_m$ ,  $\omega_m \rightarrow \omega_k$ .

С другой стороны, имея в виду рис. 3, можно вести речь о трех резонансных частотах:  $\omega_m$ ,  $\omega_k$  и  $\omega_0$ . На первой имеет место резонанс скорости инертного элемента, на второй – резонанс скорости изменения длины упругого элемента, на третьей – резонанс скорости изменения длины резистивного элемента.

#### 4. Последовательное соединение и источник силы. Антирезонанс скоростей.

Порядок рассуждений такой же, как в п. 2.

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента –

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i\pi/2} = V_m e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента –

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i\pi/2} = V_k e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента

$$-\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{i0} = V_r e^{i0}.$$

Разумеется,  $\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}$ .

Комплексная амплитуда импульса –

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i\pi/2} = m \frac{1}{\omega m} F e^{-i\pi/2} = \frac{F}{\omega} e^{-i\pi/2} = P e^{-i\pi/2}. \quad (65)$$

Комплексная амплитуда производной силы –

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k F e^{i\pi/2} = k \frac{\omega}{k} F e^{i\pi/2} = \omega F e^{i\pi/2} = B e^{i\pi/2}. \quad (66)$$

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) –

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = F y e^{i\varphi} = V e^{i\varphi}.$$

Амплитудно-частотная характеристика –

$$V(\omega) = F \sqrt{g^2 + (\omega/k - 1/(\omega m))^2}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  кривая  $V(\omega)$  устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (2) порождает чрезмерный импульс (65), сопровождаемый, соответственно чрезмерной скоростью инертного элемента. При сверхвысоких частотах условие (2) порождает чрезмерную производную силы (66) и чрезмерную скорость изменения длины упругого элемента. При  $\omega_0$  график проходит через минимум  $V_{\min} = V(\omega_0) = Fg = V_r$ . Имеет место антирезонанс скоростей, при котором (реактивные) скорости  $V_m$  и  $V_k$  равны и противоположны, а их сумма соответственно равна нулю.

Для системы, отличающейся от третьей тем, что  $F = 100 \text{ Н}$ , подлинная антирезонансная кривая полностью совпадает с изображенной на рисунке 4 при замене  $F \rightarrow V$ .

Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности, позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем (п. 1 и 3, 2 и 4 являются дуально инверсными). Громоздкие и трудоемкие операции, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями.

В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении (1) и понятия о механических реактансе, резистансе, импедансе, сассептансе, кондактансе и адмитансе.

С помощью этого метода получены новые результаты, в т. ч. (14), (17)–(33), (40)–(64).

В дополнение к классическому методу рассмотрены последовательное соединение механических элементов и источник скоростей.

Классическое рассмотрение доставляет одну амплитудно-частотную характеристику, символический (комплексный) метод – восемь при значительно большем числе характерных точек и характерных отношений.

Установлено, что вопреки классическому подходу резонансной частотой является исключительно  $\Omega_0$  (а не  $\Omega_k$ ). Другими словами, резонансная частота не сдвигается от частоты свободных колебаний. Это обусловлено тем, что при классическом рассмотрении не установлена симметрия частот (23), (54), а при символическом она очевидна.

С другой стороны, можно вести речь о трех резонансных частотах:  $\Omega_k$ ,  $\Omega_m$  и  $\Omega_0$ . На первой имеет место резонанс упругой силы и резонанс скорости изменения длины упругого элемента, на второй – резонанс инертной силы и резонанс скорости инертного элемента, на третьей – резонанс резистивной силы и резонанс скорости изменения длины резистивного элемента.

Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей, которые не были определены классическим методом. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника силы либо последовательного соединения и источника скорости. Антирезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения и источника скорости либо последовательного соединения и источника силы.

Для всех описанных случаев фазо-частотные характеристики особой оригинальностью не отличаются и поэтому не рассматриваются.

## Литература

1. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 4 (6). – Ч. 1. – С. 21–25.
2. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 1 (7). – Ч. 2. – С. 27–32.
3. Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности виброприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.
4. Попов, И. П. Инертная колебательная система из двух грузов для вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 2 (8). – С. 10–12.
5. Попов, И. П. Использование инертного триплетного маятника в вибрационных сортировальных машинах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 11–13.
6. Попов, И. П. Построение вибрационных сортировальных машин по схеме мультиинертного осциллятора / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 14–17.
7. Thompson, W. T. Theory of Vibrations / Thompson, W. T. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.
8. Inman, Daniel J. Engineering Vibration / Inman, Daniel J. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.
9. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
10. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – Москва : Наука. – 1980. – 512 с.

*I.P. Popov*

*Kurgan State University*

## STUDY OF VARIANTS AND FEATURES OF NEAR-RESONANT PHENOMENA IN MECHANICAL SYSTEMS

The study of mechanical systems in resonant and near-resonant modes is presented. Parallel and sequential connection of elements in a mechanical system with a source of force or a source of speed as a source of external mechanical harmonic action are considered. A simplified method for modeling forced oscillations using a symbolic (complex) method is proposed. It makes it possible to significantly increase productivity, simplify and formalize mathematical transformations. It was found that, contrary to the classical approach, the resonant frequency does not shift from the frequency of free oscillations.

Reactance, Resistance, Impedance, Susceptance, Conductance, Admittance.