УДК 624.046.5




С.А. Соловьев, А.А. Соловьева,
В.Ю. Пивень, Л.С. Шевцов
Вологодский государственный университет

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СТАЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Стальные плоские фермы являются несущими стропильными и подстропильными конструкциями для многих зданий и сооружений. В исследовании разработан вероятностный подход к анализу надежности элементов стальной плоской фермы. Нагрузки на фермы и прочностные характеристики стали элементов фермы представлены в виде случайных величин. Для стохастического моделирования снеговой нагрузки используется закон распределения Гумбеля (двойной экспоненциальный), а для моделирования физико-механических свойств стали – нормальное распределение. Общая надежность фермы представлена в виде условной последовательной механической системы, учитывающей различные критерии предельных состояний для элементов фермы.

Надежность, стальная ферма, случайная нагрузка, снеговая нагрузка, безопасность, вероятность отказа.

Развитие методов оценки механической безопасности элементов строительных конструкций является актуальной научной задачей в свете требований Закона РФ №384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений». Стальные плоские фермы являются несущими элементами многих зданий и сооружений. Обрушения конструкций такого типа (обрушение покрытия «Трансвааль-парк» в Москве (2004), обрушение конструкций покрытия бассейна «Дельфин» в Пермском крае (2005) и др.) отражает необходимость дальнейшего совершенствования их оценки безопасности при проектировании и эксплуатации.

Показателем механической безопасности может служить надежность, мерой которой является вероятность безотказной работы. Исследование проблемы надежности ферм является актуальной научной задачей [1–3]. В данной работе рассмотрим вероятностный подход к оценке надежности элемента фермы (стержня) при совокупности различных законов распределения в математической модели предельных состояний.

В общем виде условие предельного состояния для элемента фермы (стержня) можно записать как

$$\widetilde{N}\left(\widetilde{q}_1,\ \widetilde{q}_2,\ \ldots\ \widetilde{q}_n\right) \le \widetilde{N}_{ult}\left(\widetilde{\sigma}_{s,ult}\right), \qquad (1)$$

где $\widetilde{N}\left(\widetilde{q}_1,\ \widetilde{q}_2,\ \ldots\ \widetilde{q}_n\right)$ – функция продольной силы, зависящая от случайных (по значению) нагрузок $\widetilde{q}_i$ на конструкцию плоской фермы $\widetilde{q}_1$, $\widetilde{q}_2$, ... $\widetilde{q}_n$; $\widetilde{N}_{ult}\left(\widetilde{\sigma}_{s,ult}\right)$ – предельное допустимое значение продольной силы на элемент фермы, зависящее от предельного напряжения стали элемента фермы $\widetilde{\sigma}_{s,ult}$.

Первоначально необходимо разработать стохастическую модель для описания нагрузки на стержни фермы. В общем виде нагрузки и воздействия на конструкцию фермы можно разделить на нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия и собственного веса элементов фермы, снеговые нагрузки и технологические нагрузки.

Нагрузки от собственного веса элементов конструкции покрытия могут быть описаны нормальным законом распределения. Так, в приложении C Eurocode 0 «Basis of structural design» отмечено, что нормальное распределение может быть использовано для описания распределения собственного веса конструкций. Нормальное распределение для описания этих параметров также использовано и в исследовании [1].

Для моделирования снеговой нагрузки чаще используется закон распределения Гумбеля (или двойной экспоненциальный) [4]:

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\alpha - x}{\beta}\right)\right], \qquad (2)$$

где $\beta \approx \dfrac{S_X\sqrt{6}}{\pi}$ – мера рассеяния распределения Гумбеля, S_X – среднеквадратическое отклонение случайной величины *X*; $\alpha = m_X - \gamma \cdot \beta \approx m_X - 0{,}45 \cdot S_X$ – мера центра распределения Гумблея, γ – постоянная Эйлера-Маскерони.

В случае ограниченной по объему выборки могут быть введены поправки для оценки коэффициентов β и α в виде: $\alpha = m_X - \left(0{,}45 + 0{,}34n^{-0{,}69}\right) \cdot S_X$ и $\beta = \left(0{,}78 + 1{,}54n^{-0{,}75}\right)S_X$.

Рассмотрим более подробно формирование математической модели предельного состояния. Расчет усилий в стержнях фермы может быть выполнен в аналитической форме на базе известных классических подходов, например, методом моментной точки (рис. 1).

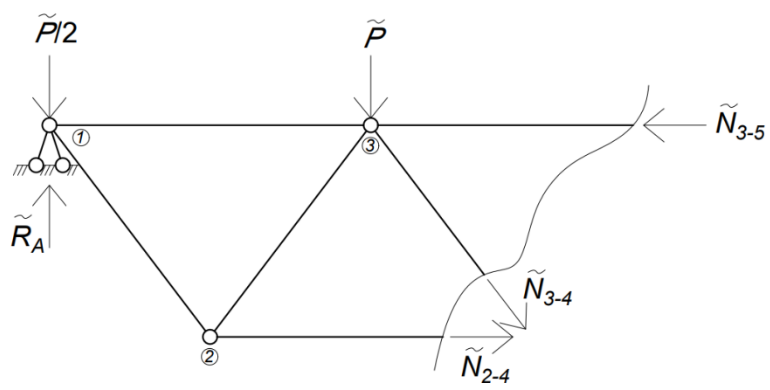

Рис. 1. Общий вид отсеченной части фермы типа «Молодечно» (Серия 1.460.3-14) при использовании метода моментной точки

Переход от равномерно распределенной нагрузки q к сосредоточенной P осуществляется по известному алгоритму через грузовые площади, которые можно считать малоизменчивыми (детерминированными) величинами.

Известно, что усилие $\widetilde{N}_{3-5}$ от случайной нагрузки $\widetilde{P}$ может быть найдено как

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow \widetilde{N}_{3-5} \cdot h + \widetilde{P} \cdot 0.5 \cdot l_{2-4} + \\ + 0.5 \cdot \widetilde{P} \cdot (0.5 \cdot l_{1-3} + l_{2-4}) - \widetilde{R}_A \cdot (0.5 \cdot l_{1-3} + l_{2-4}) = 0 \qquad (3)$$

где $\widetilde{N}_{i-j}$ продольная сила в стержне фермы *i-j*; h – высота фермы; l_{i-j} длина элемента *i-j* фермы.

Из уравнения (3) следует, что любое усилие $\widetilde{N}_{i-j}$ может быть выражено в общем виде как

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) = \widetilde{P} \cdot \delta ,$$

где δ – коэффициент, зависящий от формы и геометрических размеров фермы.

Подход, в котором узловая нагрузка является случайной по значению вообще, но одинаковой по значению в каждом узле фермы, является обоснованным для стохастических задач в строительной практике. Условно подразумевается, что наперед неизвестно, какое напряжение в стержнях фермы будет от снеговой нагрузки в следующий год, но известно, что снеговая нагрузка будет равномерно распределена по покрытию.

С учетом вышеизложенного, для любого стержня фермы можно составить математическую модель предельного состояния вида:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \leq \widetilde{N}_{i-j,ult} , \qquad (4)$$

где $\widetilde{N}_{i-j,ult}$ – предельное продольное усилие для стержня фермы *i-j*.

Предельное усилие для *i-j* элемента фермы может быть определено по различным критериям предельных состояний.

Например, по условию прочности стали стержня фермы:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \leq \widetilde{N}_{i-j,ult} = \widetilde{\sigma}_{s,ult} \cdot A , \qquad (5)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня фермы; $\widetilde{\sigma}_{s,ult}$ – предельное напряжение в стали стержня фермы (случайная величина).

Из условия устойчивости *i-j* стержня фермы:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}\right) \leq \widetilde{N}_{i-j,ult} = \widetilde{\sigma}_{s,ult} \cdot A \cdot \widetilde{\varphi} , \qquad (6)$$

где $\widetilde{\varphi}$ – коэффициент продольной устойчивости.

Т.к. нагрузки, входящие в математическую модель (1), описываются различными законами распределения (Гумбеля и нормальным), то выражение (4) можно записать в виде:

$$\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}_{snow}\right) \leq \widetilde{N}_{i-j,ult} - \widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}_{sw}\right), \qquad (7)$$

где $\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}_{snow}\right)$ – усилие в стержне *i-j* от снеговой (snow) нагрузки; $\widetilde{N}_{i-j}\left(\widetilde{P}_{sw}\right)$ – усилие в стержне *i-j* от собственного веса (self-weight) конструкций.

В обобщенном виде неравенство (7) можно записать как

$$X \leq Y . \qquad (8)$$

Т.к. в обозначение переменной Y входит несколько случайных величин, описываемых нормальным распределением, то статистические параметры могут быть вычислены следующим образом: математическое ожидание $m_y = m_{N_{i-j,ult}} - m_{N_{i-j}}$, среднеквадратическое отклонение $S_y = \sqrt{S^2{}_{N_{i-j,ult}} + S^2{}_{N_{i-j}}}$, где $m_{N_{i-j,ult}}$ – математическое ожидание предельного продольного усилия в стержне *i-j*; $m_{N_{i-j}}$ – математическое ожидание продольного усилия в стержне *i-j* от собственного веса конструкций; $S_{N_{i-j,ult}}$ – среднеквадратическое отклонение предельного продольного усилия в стержне *i-j*; $S_{N_{i-j}}$ – среднеквадратическое отклонение продольного усилия в стержне *i-j* от собственного веса конструкций. Для случайной величины X используется распределение и параметры по выражению (2).

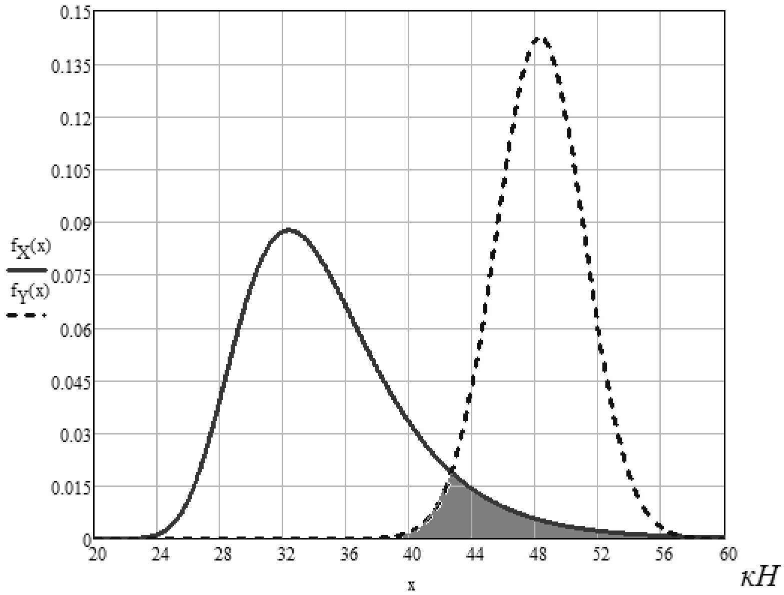

Рис. 2. Пример функции плотностей вероятностей распределения усилия в элементе фермы от снеговой нагрузки как случайной величины X и предельного усилия Y

Вероятность отказа для математической модели вида (8) можно вычислить по формуле [5]:

$$Q = \int_{0}^{+\infty} f_X(x) F_Y(x) dx, \quad (9)$$

где $f_X(x)$ – плотность распределения случайной величины *X*; $F_Y(x)$ – функция распределения случайной величины *Y*.

С учетом принятых выше законов распределения для модели (7) можно записать выражение (9) в виде:

$$Q = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp\left[\frac{\alpha - x}{\beta} - \exp\left(\frac{\alpha - x}{\beta}\right)\right] \cdot 0{,}5 \left[1 + erf\left(\frac{x - m_y}{\sqrt{2S_y^2}}\right)\right] dx, \quad (10)$$

где *erf*() – функция ошибок (error function).

После вычисления параметров α, β, m_y и S_y, вероятность отказа *Q* по (7) рассчитывается в программе MathCAD или аналогичной ей.

Вероятность безотказной работы для стержня фермы *i-j* по рассматриваемому предельному состоянию вычисляется как $P_{i-j} = 1 - Q_{i-j}$.

Графически решение (10) представляет собой поиск площади пересечения функций плотностей распределения случайных величин *X* и *Y* (рис. 2).

Для комплексной оценки надежности стального элемента требуется выполнить расчеты по определению его вероятности отказа по всем критериям предельных состояний (прочность, устойчивость, гибкость). В этом случае элемент фермы может быть представлен в виде последовательной условной механической системы [5], когда отказ одного условного элемента (наступление любого предельного состояния) приводит к отказу всего стержня фермы. Математически комплексную надежность элемента фермы можно рассчитать перемножением вероятностей безотказной работы для элемента фермы по всем критериям предельных состояний: $P^{full}{}_{i-j} = \prod P_{i-j}$.

В исследовании рассмотрен вероятностный подход к оценке надежности элемента фермы (стержня) с учетом различных распределений вероятностей случайных величин в математической модели предельного состояния.

Предложенный подход позволяет дать стохастическое обоснование по оценке наиболее опасных стержней фермы с точки зрения вероятности их отказа.

Надежность элемента фермы должна быть рассчитана по всем критериям предельных состояний, после чего выполняется комплексная оценка надежности.

Литература

1. Assessment of steel truss fire safety in terms of the system reliability analysis / K. Kubicka, P. Obara, U. Radoń, W. Szaniec // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 19. – Issue 2. – P. 417–427.

2. Reliability assessment of truss structures with natural frequency constraints using metaheuristic algorithms / S. Rohollah, H. Vaez, H. Mehanpour, M. A. Fathali // Journal of Building Engineering. – 2020. – Vol. 28. – 101065.

3. Behavior and design for component and system of cold-formed steel roof trusses / M. Reda, T. Sharaf, A. ElSabbagh, M. ElGhandour // Thin-Walled Structures. 2019. – Vol. 135. – P. 21–32.

4. Золина, Т. В. Моделирование снеговой нагрузки на покрытие промышленного здания / Т. В. Золина, П. Н. Садчиков // Вестник МГСУ. – 2020. – № 8. – С. 25–33.

5. Соловьев, С. А. Моделирование случайной статической нагрузки на покрытия сооружений при неполной статистической информации / С. А. Соловьев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 243–249.

S.A. Solovev, A.A. Soloveva, V.Yu. Piven, L.S. Shevcov
Vologda State University

STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSIS OF PLANAR TRUSS ELEMENTS

Steel planar trusses use as load-bearing truss and sub-truss structures for many buildings. The article presents a probabilistic approach to the reliability assessment of steel planar truss elements. The loads on the trusses and the strength properties of the steel elements of the truss are presented as random variables. The Gumbel distribution (double exponential distribution) is used for stochastic modeling of snow load, and the normal distribution is used for modeling the physical and mechanical properties of steel. The overall reliability of the truss is presented as a conditional sequential mechanical system that takes into account various limit state criteria for truss elements.

Reliability, steel truss, random load, snow load, safety, failure probability