УДК 519.95


А.Г. Кузьмин, М.Ф. Умаров
Вологодский государственный университет

КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОСТОЯНИЙ ДЫХАТЕЛЬНОГО ГОМЕОСТАЗА

В данной работе проведен кибернетический анализ состояния дыхательного гомеостаза методом модального управления и оценена матрица линейных обратных связей, обеспечивающая стабилизации системы с заданной динамикой.

Кибернетический анализ, дыхательный гомеостаз, модальный синтез, регулятор.

В настоящее время в связи с возрастающей потребностью в высококачественных сложных системах ведутся исследования с целью разработки методов, пригодных для проектирования таких систем. Подобные методы должны быть действенными не только с точки зрения вычислений, но также, что более важно, должны способствовать выработке общего подхода к таким задачам. Наиболее опытные инженеры обладают определенной интуицией, а потому любой предлагаемый метод должен дать возможность инженеру «схватить» его техническую сторону, произвести оценку на основе практического опыта.

Анализ и синтез систем со многими входами и выходами, называемых многосвязными, представляет собой сложную задачу. Определение взаимно связанных воздействий и управление ими в многосвязных системах встречает определенные трудности, наилучшим образом разрешаемые привлечением кибернетических навыков.

Кибернетика эта наука об управлении сложными системами, которая изучает общие закономерности процессов, происходящих в живой природе, человеческом обществе, технике или промышленности, и обеспечивает создание систем оптимального управления этими процессами в оптимальном варианте. Это интегральная наука, возникшая на стыке ряда специальных дисциплин – теории автоматов, техники связи, математической логики, теории информации и других.

Пользуясь терминологией кибернетики, действительно можно сказать, что живой организм представляет собой сложную управляемую систему, в которой постоянно происходит взаимодействие множества переменных внешней и внутренней среды. В связи с этим представляет интерес исследование поведения системы в живом организме, в частности системы дыхательного гомеостаза [1].

Человеческий организм позволяет поддерживать дыхательный гомеостаз путем периодического обновления воздуха в легких. Дыхательный гомеостаз – состояние, характеризующееся оптимальным для жизнедеятельности относительным постоянством газового состава крови и тканей. Постоянно меняющиеся режимы деятельности организма, связанные с изменениями потребления O_2 и выделением CO_2 (мышечная деятельность, эмоциональные реакции, состав атмосферного воздуха) могут влиять на дыхательный гомеостаз.

Дыхательный гомеостаз представляет собой систему регуляций, предназначенную для поддержания постоянства напряжения углекислого газа (Pco_2), концентрации водородных ионов (H^+) и напряжения кислорода (Po_2) в артериальной крови при наличии некоторых возмущений.

Цель данной работы – иметь представление о гомеостазе, ознакомление с алгоритмом синтеза регулятора системы стабилизации дыхательного гомеостаза и проведение кибернетического анализа состояния гомеостаза методом модального управления.

Метод модального управления основан на использовании корней характеристического уравнения, которые относятся к модальным характеристикам системы.

Любая кибернетическая система в упрощенном виде состоит из следующих звеньев: входа (детектора), блока управления, блока исполнения (эффектора) и выхода (рис. 1).

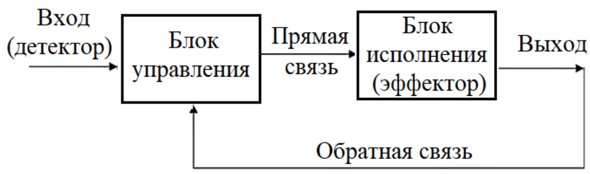

Рис. 1. Кибернетический механизм регуляции гомеостаза

В соответствии с заданным алгоритмом через вход системы в блок управления поступает информация в виде переменных величин, затем после переработки по каналам прямой связи в блок исполнения, и оттуда на выход. Как видно из рисунка 1, между блоками управления и исполнения, а также блоками управления и выхода имеется прямая и обратная связи. Результирующая информация о выполнения команд передается к управляющей части по каналу обратной связи и учитывается при выработке последующих команд. Обратная связь является одним из способов приспособления организмов к меняющимся условиям существования.

Вместе с тем обратная связь существует в двух видах – отрицательной и положительной. В биологических системах в основном работает отрицательная обратная связь (ООС). Сущность ООС заключается в том, что при нарушении равновесия в какой-нибудь системе живого организма может возникать ряд последствий, которые приводят к устранению этих нарушений.

Примером ООС может служить регулирование уровня содержания углекислого газа, кислорода и водородных ионов в дыхательной системе живого организма.

В качестве примера рассмотрим систему дыхательного гомеостаза по Ф. Гродинзу (рис. 2) [2].

Термин «гомеостаз» применяется для обозначения постоянства химического состава внутренней среды организма. Дыхательная система служит главным образом для сохранения постоянства напряжения кислорода и углекислого газа, а также концентрации водородных ионов (pH). На данной схеме в качестве входного сигнала принята альвеолярная концентрация $\mathbf{V_A}$. Буквой i обозначены входные параметры, а буквой o – выходные. Здесь «возмущениями», поступающими на вход, являются повышенное содержание углекислого газа, недостаток кислорода во вдыхаемом воздухе или сдвиги pH крови.

Для стабилизации концентрации CO_2 в данной системе возможно использование линейных обратных связей [3]. Управляющий сигнал (вектор $u(t)$) при этом формируется по закону:

$$u = -K\hat{x}(t), \tag{1}$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка вектора состояния объекта; K – матрица обратных связей с постоянными коэффициентами.

В соответствии с положениями теории автоматического управления [6] объект, заданный матрицами A, B, C, описывается векторно-матричной моделью в пространстве состояний [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{2}$$

где $\dot{x}$ – функция, описывающая изменение входных параметров; y – функция, описывающая изменение выходных параметров системы.

Для синтеза регуляторов и наблюдателей системы управления данным объектом необходимо оценить управляемость и наблюдаемость этого объекта.

Управляемость гарантируется, если матрица

$$D_y = \left[B, AB, A^2B, A^3B \right] \tag{3}$$

имеет ранг, равный четырем.

Аналогично наблюдаемость гарантируется, если матрица

$$D_i = \left[C^T, A^T C^T, \left(A^T \right)^2 C^T, \left(A^T \right)^3 C^T \right] \tag{4}$$

также имеет ранг, равный четырем.

Матрицы A, B, C, могут быть преобразованы в различные формы, называемые каноническими [5].

Каноническая управляемая форма имеет вид

$$A_y = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B_y, \; C_y,$$

каноническая наблюдаемая форма имеет вид

$$A_i = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_i, \; C_i,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, – коэффициенты характеристического многочлена исходной матрицы A.

Подставляя (1) в уравнение (2), получим:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t). \tag{5}$$

Если оценка вектора состояния $\hat{x}(t)$ сходится с заданной разработчиком скоростью к вектору состояния $x(t)$ или вектор $\hat{x}(t)$ измеряется непосредственно, то динамика управления объектом будет определяться уравнением:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \tag{6}$$

и, следовательно, выбором собственных значений матрицы $A - BK$. Синтез управления в этом случае называется синтезом модального управления, так как выбранные разработчиком собственные значения матрицы $A - BK$ (моды) будут определять движение всей системы [6]. Таким образом, модальное управление может обеспечить устойчивость и быстродействие многомерной системы. Точность в данном случае проверяется при моделировании синтезированной системы.

Зададим собственные значения β_i , $i = \overline{1,4}$ и $\operatorname{Re}\beta_i < 0$. Тогда характеристический многочлен матрицы $A - BK$ будет иметь вид:

$$J_{A-BK}(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)...(\lambda - \beta_n).$$

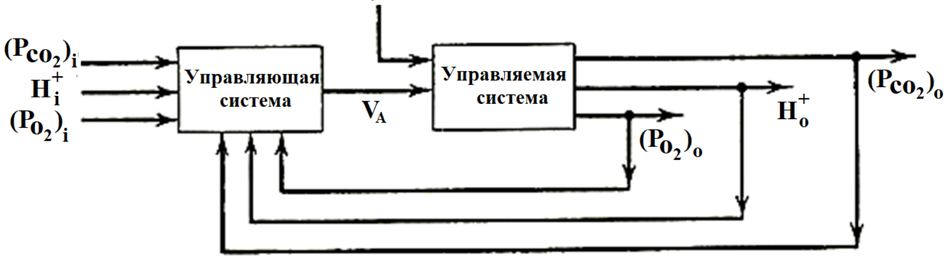

Рис. 2. Блок-схема дыхательного гомеостаза по Ф. Гродинзу

Сопровождающая матрица многочлена имеет вид, совпадающий с видом матрицы состояния в канонической управляющей форме:

$$A_y - B_y K_y = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где γ_i , $i = \overline{1,4}$ – коэффициенты характеристического многочлена при $\gamma_0 = 1$; A_y и B_y – матрицы в канонической управляемой форме, то есть

$$A_y = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$K_y = [\, k_{y1}, k_{y2}, k_{y3}, k_{y4} \,]. \tag{8}$$

Тогда, подставляя (8) в (7) получим

$$A_y - B_y K_y = \begin{bmatrix} -a_1 - k_{y1} & -a_2 - k_{y2} & -a_3 - k_{y3} & -a_4 - k_{y4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда из (7) получим равенства $k_{yi} = \gamma_i - a_i$, $i = \overline{1,4}$. Преобразуя к исходному базису по формуле $K = K_y M$, получим матрицу линейных обратных связей, обеспечивающую работу системы стабилизации с заданной динамикой.

Для случая непосредственного измерения вектора состояния: $C = I$, где I – единичная матрица.

Импульсную реакцию такой системы можно определить по формуле:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}\delta(t). \tag{9}$$

Матричную экспоненту в формуле (9) можно вычислить по следующему алгоритму:

1) по набору собственных чисел β_i найдутся числа γ_i по формулам:

$$\gamma_0 = 1, \tag{10а}$$

$$\gamma_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4), \tag{10б}$$

$$\gamma_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3 + \beta_2\beta_4 + \beta_3\beta_4, \tag{10в}$$

$$\gamma_3 = -(\beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_4 + \beta_1\beta_3\beta_4 + \beta_2\beta_3\beta_4), \tag{10г}$$

$$\gamma_4 = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4; \tag{10д}$$

2) вычисляются числа k_i:

$$k_{yi} = \gamma_i - a_i; \tag{11}$$

3) составляется матрица K_y :

$$K_y = [\, k_{y1}, k_{y2}, k_{y3}, k_{y4} \,];$$

4) вычисляется матрица $B = MB_y$;

5) вычисляется матрица K :

$$K = K_y M; \tag{12}$$

6) вычисляется матрица $A - BK$;

7) по собственным числам β_i находят собственные векторы u_i ; вектором u_i является любое ненулевое решение системы

$$(A - BK - \beta_i)u_i = 0;$$

8) составляется модальная матрица $U = [\, u_1, u_2, u_3, u_4 \,]$;

9) вычисляется обратная матрица U^{-1} ;

10) вычисляется матрица $Ue^{\Lambda t}U^{-1}$, где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

По такому алгоритму проводится кибернетический анализ состояний гомеостаза, обусловленных процессом дыхания.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем способ приведения этой матрицы к канонической управляемой форме. Для этого последовательно построим матрицы M_3, M_2 и M_1, которые последовательно приводят матрицу A к нужной канонической форме. Матрица M_3 равна:

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она получается из единичной матрицы путем замены ее третьей строки на строку:

$$m_{31} = -\frac{a_{41}}{a_{43}}, \quad m_{32} = -\frac{a_{42}}{a_{43}}, \quad m_{33} = \frac{1}{a_{43}}, \quad m_{34} = -\frac{a_{44}}{a_{43}}.$$

Тогда имеем:

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A' = M_3^{-1}AM_3 = \begin{bmatrix} -5 & -2{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ -24 & -15 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица M_2 равна:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1{,}6 & -0{,}06 & 0{,}7 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она получается из единичной матрицы путем замены ее второй строки на строку:

$$m_{21} = -\frac{a'_{31}}{a'_{32}}, \quad m_{22} = \frac{1}{a'_{32}}, \quad m_{23} = -\frac{a'_{33}}{a'_{32}}, \quad m_{24} = -\frac{a'_{34}}{a'_{32}}.$$

Тогда имеем:

$$M_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-24&-15&11&19\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A''=M_2^{-1}A'M_2=\begin{bmatrix}-1&0,2&0&-1\\6&5&34&24\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Матрица M_1 равна:

$$M_1=\begin{bmatrix}0,17&-0,83&-5,67&-4\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Она получается из единичной матрицы путем замены ее первой строки на строку:

$$m_{11}=\frac{1}{a''_{21}},\quad m_{12}=-\frac{a''_{22}}{a''_{21}},\quad m_{13}=-\frac{a''_{23}}{a''_{21}},\quad m_{14}=-\frac{a''_{24}}{a''_{21}}.$$

Тогда имеем

$$M_1^{-1}=\begin{bmatrix}6&5&34&24\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad A'''=M_1^{-1}A''M_1=\begin{bmatrix}4&40&56&20\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

Полученная матрица и есть каноническая матрица управления: $A_y = A'''$.

Если обозначить: $M = M_3 M_2 M_1$, то $M^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}$ и, следовательно,

$$M=\begin{bmatrix}0,167&-0,83&-5,67&-4\\-0,27&1,267&9,8&7,667\\0,067&-0,23&-2,87&-4\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}242&192&178&208\\20&18&22&30\\4&3&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Тогда, справедливо равенство

$$A_y = M^{-1}AM. \tag{14}$$

Если матрицами управления и наблюдения являются:

$$B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix},\quad C=[1, 0, 0, 0],$$

то соответствующие канонические матрицы определяются равенствами:

$$B_y=M^{-1}B=\begin{bmatrix}416\\60\\2\\2\end{bmatrix},\quad C_y=CM=[0{,}167, -0{,}833, -5{,}667, -4].$$

Матрица Р линейного преобразования к заданной форме находится по следующему правилу:

$$P_y=\left[B_y, A_yB_y, A_y^2B_y, ..., A_y^{n-1}B_y\right]\cdot\left[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B\right]^{-1}, \tag{15}$$

где n – размер матрицы A.

Данное преобразование находится корректно в случае, когда матрица B является вектором и система является управляемой (в случае приведения к канонической управляемой форме) или наблюдаемой (в случае приведения к канонической наблюдаемой форме).

Таким образом, управляющая система в жизни всегда более сложна, чем на кибернетических схемах, но, тем не менее, модель оказалась весьма полезной. На основе закономерностей гомеостаза разрабатываются эффективные методы лечения и рациональной терапии.

Именно кибернетике принадлежит роль и механизмов гомеостаза живого организма, так как эта наука позволяет, применяя теорию автоматического регулирования и математического анализа, решить ряд биологических и медицинских вопросов и проблем. Очевидно, что данное направление открыло новые перспективы для дальнейших клинических и диагностических исследований и внедрения современной техники для нужд здравоохранения в Российской Федерации. Дальнейший прогресс решения актуальных задач в области биомедицины лежит в совместном решении специалистами различного профиля.

Литература

1. Минцер, О. П. Биологическая и медицинская кибернетика : справочное пособие / О. П. Минцер. – Киев : Наукова думка, 1986. – 375 с.
2. Гродинз, Ф. Теория регулирования и биологические системы : перевод с английского / Ф. Гродинз. – Москва : Мир, 1966. – 252 с.
3. Андреев, Ю. Н. Управление конечномерным линейным объектом : учебное пособие / Ю. Н. Андреев. – Москва : Наука, 1976. – 424 с.
4. Деруссо, П. Пространство состояний в теории управления: учебное пособие / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – Москва : Наука, 1986. – 620 с.
5. Грандмахер, Ф. Р. Теория матриц : учебное пособие / Ф. Р. Грандмахер. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с.

A.G. Kuzmin, M.F. Umarov
Vologda State University

CYBERNETIC ANALYSIS OF RESPIRATORY HOMEOSTASIS CONDITIONS

In this paper a cybernetic analysis of the state of respiratory homeostasis by modal control method is performed and a matrix of linear feedbacks, which provides stabilization of the system with a given dynamics, is evaluated.

Cybernetic analysis, respiratory homeostasis, modal synthesis, regulator.