



НАЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ В МЕХАНИЗМАХ

В статье представлен кинематический анализ механизма со сложением вращательного синхронного движения. Разработана математическая модель сложного движения, обоснована ее достоверность. Рассмотрены различные варианты смешанного вращательного движения. Представлены практические рекомендации по применению результатов.

Координаты, вращение, вектор, годограф, эллипс, окружность, улитка.

В ряде механизмов используется синхронное наложение вращений. Кинематика этого процесса изучена недостаточно. В то же время понимание закономерностей в подобных системах необходимо на этапе разработки и проектирования. Ниже рассмотрены кинематические схемы и их кинематический анализ.

Если система отсчета $x'O'y'$ движется прямолинейно и равномерно со скоростью \mathbf{v}_1 в неподвижной системе отсчета xOy и точка a движется прямолинейно и равномерно со скоростью \mathbf{v}_2 в системе отсчета $x'O'y'$, то в соответствии с принципом относительности Галилея точка a движется прямолинейно и равномерно со скоростью \mathbf{v}_3 в системе отсчета xOy , а годографом вектора A , соединяющего точки O и a , является прямая линия (рис. 1) [1].

Цель работы – установить, как в подобной ситуации обстоит дело при сложении *вращательных* синхронных движений [2–4].

Практический аспект темы определяется тем, что во многих механизмах, таких как мультиинертный осциллятор [5–9], планетарные передачи [10], приводы фрез в машинах для очистки труб больших диа-

метров и т.п., реализуется суммирование вращательных движений, и форма годографа является полезной информацией при проектировании подобных устройств.

Пусть точка O' вращается вокруг точки O в системе отсчета xOy с постоянной угловой скоростью ω . Расстояние ρ_1 между точками не меняется. Координатные оси обеих систем отсчета всегда попарно параллельны. Точка a вращается вокруг точки O' в системе отсчета $x'O'y'$ с постоянной угловой скоростью $-\omega$ или $+\omega$. Расстояние ρ_2 между точками не меняется.

При разнонаправленном вращении точек a и O' годографом вектора A является эллипс.

Координаты точки O' в системе xOy :

$$x_1 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y_1 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (1)$$

Координаты точки a в системе $x'O'y'$:

$$x_2 = \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2).$$

Здесь φ_1, φ_2 – начальные углы.

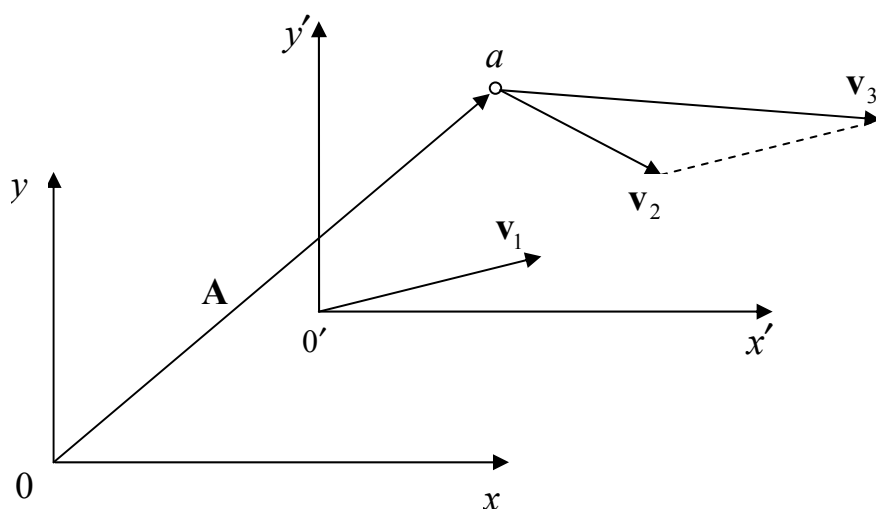


Рис. 1. Сложение движений

Координаты вектора А в системе xOy :

$$x = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(-\omega t + \varphi_2),$$

$$y = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(-\omega t + \varphi_2).$$

$$x = \cos \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) - \sin \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2),$$

$$y = \sin \omega t (\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2).$$

Отсюда следует:

$$\sin \omega t = \frac{y(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} - \frac{x(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2},$$

$$\cos \omega t = \frac{x(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} + \frac{y(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1,$$

$$\frac{y^2(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + x^2(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} -$$

$$- \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{x^2(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + y^2(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{2xy(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)(\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{y^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1. \quad (2)$$

Это уравнение эллипса.

Большая и малая полуоси эллипса (2) соответственно равны $(\rho_1 + \rho_2)$ и $|\rho_1 - \rho_2|$.

Обратным отсчетом времени можно добиться, чтобы $\varphi_1 = \varphi_2$, а поворотом координатных осей – чтобы $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда (2) примет вид

$$\frac{x^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} + \frac{y^2(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1,$$

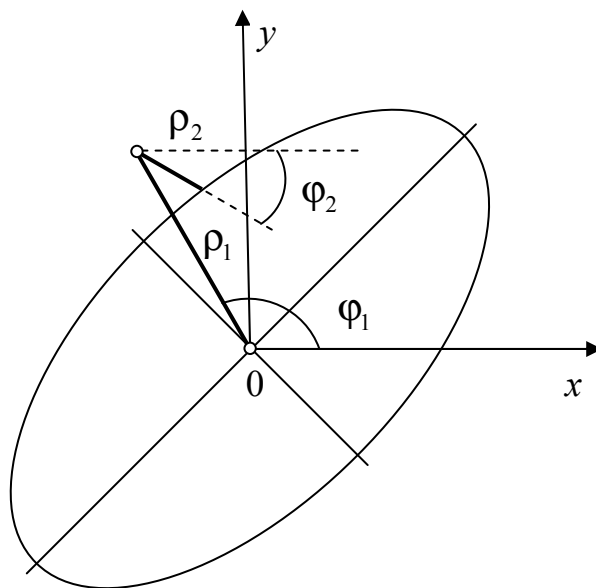


Рис. 2. Эллиптический годограф

$$\frac{x^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{y^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1 \quad (3)$$

(канонический вид).

Следствие 1. При $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ эллипс (2) вырождается в отрезок прямой линии длиной 4ρ .

Следствие 2. Корни характеристического уравнения эллипса равны

$$\lambda_1 = (\rho_1 + \rho_2)^2, \quad \lambda_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2.$$

Следствие 3. Эксцентриситет эллипса равен отношению среднегеометрического значения величин ρ_1 и ρ_2 к их среднеарифметическому значению:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{(\rho_1 + \rho_2)/2}.$$

Следствие 4. Фокусы эллипса (для канонической формулы (3)) равны

$$f_{1,2} = (\pm 2\sqrt{\rho_1\rho_2}, 0).$$

Оси эллиптического годографа повернуты на угол $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ в системе отсчета xOy .

При повороте координатных осей на угол $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ выражение (3) принимает вид:

$$\frac{\left(x \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + \frac{\left(-x \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + y \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2} = 1,$$

$$\frac{x^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} +$$

$$+ \frac{y^2[\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} - \frac{4xy\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} = 1,$$

что совпадает с (2).

На рисунке 2 $\varphi_1 = 120^\circ$, $\varphi_2 = -30^\circ$, следовательно, оси эллипса повернуты на 45° .

Обратным ходом рассуждений доказывается:

Если годографом вектора A является эллипс с полуосями $(\rho_1 + \rho_2)$ и $|\rho_1 - \rho_2|$, то точка a вращается вокруг точки O' с постоянной угловой скоростью $-\omega$ в системе отсчета $x'O'y'$.

При однонаправленном вращении точек a и O' годографом вектора A является окружность с центром в точке O .

Координаты точки O' в системе xOy определяются выражением (1).

Координаты точки a в системе $x'O'y'$:

$$x_2 = \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad y_2 = \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Координаты вектора A в системе xOy :

$$x_A = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$y_A = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Квадрат вектора A равен

$$\begin{aligned} A^2 &= x_A^2 + y_A^2 = \rho_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + \\ &+ \rho_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2\rho_1\rho_2 \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ \rho_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + \rho_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2) + \\ &+ 2\rho_1\rho_2 \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &\dots \\ &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Длина вектора A неизменна, следовательно, его годографом является окружность.

Следствие. Вектор A вращается с угловой скоростью ω в системе отсчета xOy .

Это вытекает из того, что форма треугольника $OO'a$ неизменна, а его сторона OO' вращается с угловой скоростью ω .

Обратным ходом рассуждений доказывается:

Если годографом вектора A является окружность, то точка a вращается вокруг точки O' с постоянной угловой скоростью $+\Omega$ в системе отсчета $x'O'y'$.

Если точка a неподвижна в системе отсчета $x'O'y'$, то годографом вектора A является окружность радиуса ρ_1 , координаты центра которой в системе отсчета xOy равны $x_{\rho_1} = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_{\rho_1} = \rho_2 \sin \varphi_2$.

Координаты точки O' в системе xOy определяются выражением (1).

Координаты точки a в системе $x'O'y'$:

$$x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2.$$

Координаты вектора A в системе xOy :

$$x_A = x_1 + x_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \cos \varphi_2,$$

$$y_A = y_1 + y_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \rho_2 \sin \varphi_2,$$

$$x_A - \rho_2 \cos \varphi_2 = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_A - \rho_2 \sin \varphi_2 = \rho_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$(x_A - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (y_A - \rho_2 \sin \varphi_2)^2 = \rho_1^2.$$

Теорема доказана.

Пример сложения кратных вращений. Пусть точка a вращается вокруг точки O' в системе отсчета $x'O'y'$ с постоянной угловой скоростью $+2\omega$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Координаты точки O' в системе xOy :

$$x_1 = \rho_1 \cos \omega t, \quad y_1 = \rho_1 \sin \omega t.$$

Координаты точки a в системе $x'O'y'$:

$$x_2 = \rho_2 \cos 2\omega t, \quad y_2 = \rho_2 \sin 2\omega t.$$

Координаты вектора A в системе xOy :

$$x_A = \rho_1 \cos \omega t + \rho_2 \cos 2\omega t,$$

$$y_A = \rho_1 \sin \omega t + \rho_2 \sin 2\omega t.$$

Годограф вектора A (улитка) при $\rho_1 = \rho_2$ изображен на рисунке 3.

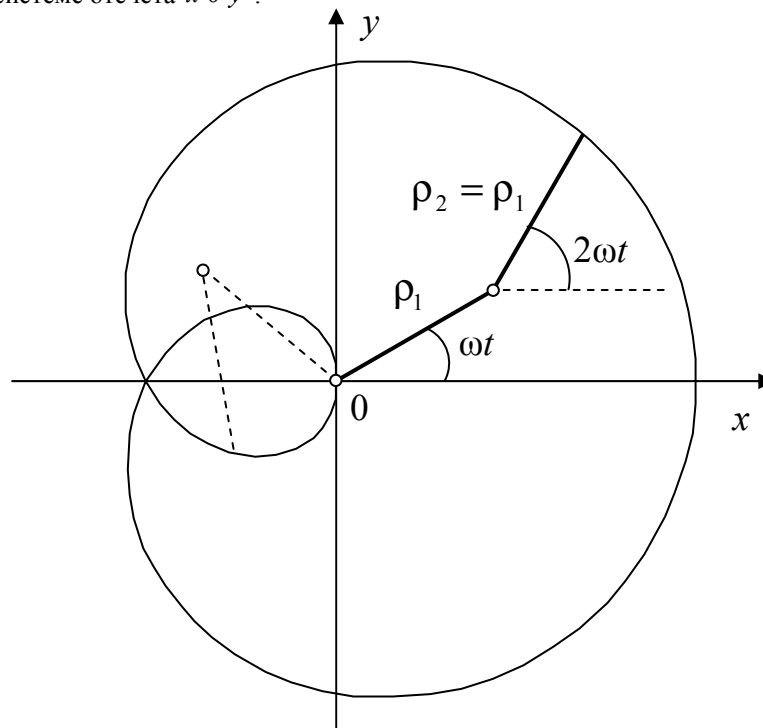


Рис. 3. Улиточный годограф

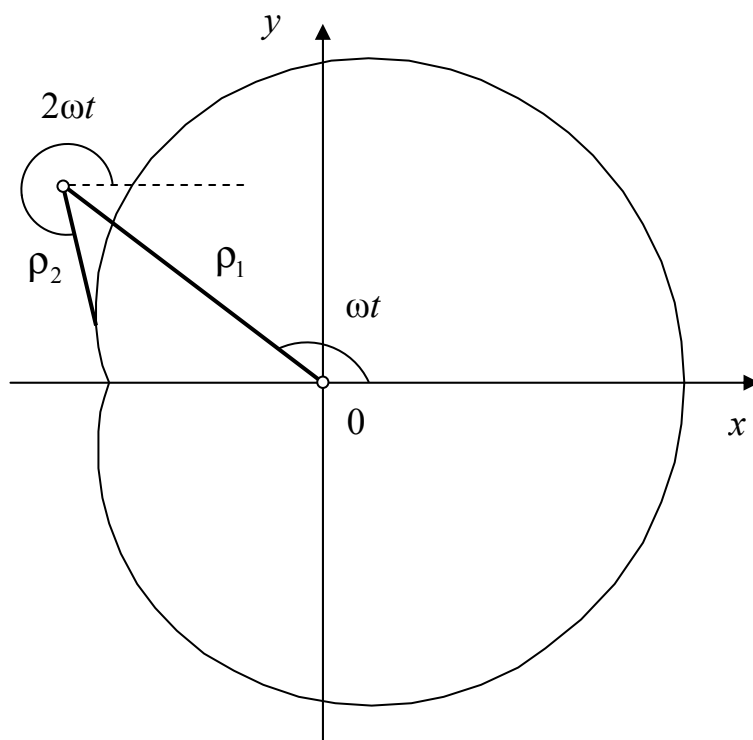


Рис. 4. Улиточный годограф без петли

Уравнение этой улитки в полярных координатах имеет вид:

$$\rho = \rho_1 \sqrt{2 + 2 \cos \frac{2}{3} \varphi}.$$

Для сравнения формула улитки Паскаля, имеющей заметное внешнее сходство, –

$$\rho = b + a \cos \varphi.$$

Условием возникновения петли улиточного годографа является неравенство

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 \sin 2\omega t,$$

$$\rho_1 \sin \omega t < \rho_2 2 \sin \omega t \cos \omega t,$$

$$\rho_1 < 2\rho_2 \cos \omega t.$$

При $\rho_1 \geq 2\rho_2$ петля не возникает (рис. 4).

Подобно тому, как результатом сложения двух равномерных прямолинейных движений является также равномерное прямолинейное движение, результатом сложения двух равномерных однонаправленных круговых движений является также равномерное круговое движение.

Годографом при сложении двух равномерных противоположно направленных круговых движений является эллипс.

При сложении двух несинхронных вращений возможны годографы в виде улитки.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании механизмов, реализующих сложные вращательные движения. При разработке техники различного назначения все в большей степени используются САПР и цифровые технологии. В этих условиях исходные данные для проектирования необходимо задавать в виде математических формул. Полученные соотношения такую возможность предоставляют.

Литература

1. Попов, И. П. Выбор систем отсчета в задачах управления движущимися инертными объектами / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 1 (3). – С. 20–22.
2. Бранец, В. Н. Об изоморфизме математических описаний операции вращения / В. Н. Бранец // Известия РАН. МТТ. – 2018. – № 2. – С. 136–143.
3. Бычков, Ю. П. О катании тела с ротором по подвижной опорной сфере / Ю. П. Бычков // ПММ. – 2015. – Т. 79, вып. 1. – С. 99–111.
4. Попов, И. П. Использование реактивного момента электромагнитного маховика для изменения положения объектов в пространстве / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 75–77.
5. Попов, И. П. Построение вибрационных сортировальных машин по схеме мультиинертного осциллятора / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 14–17.
6. Попов, И. П. Использование инертного триплетного маятника в вибрационных сортировальных машинах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 3 (9). – С. 11–13.
7. Попов, И. П. Инертная колебательная система из двух грузов для вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 2 (8). – С. 10–12.
8. Popov, I. P. Theory of a Multi-Inert Oscillator / Popov, I. P. – DOI: 10.3103/S1052618820080105 // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2020. – Vol. 49, no. 8. – P. 16–20.

9. Popov, I. P. Modeling three-inert oscillator / I. P. Popov. – DOI: 10.15593/2499-9873/2018.4.04 // Applied mathematics and control sciences. – 2018. – No. 4. – P. 73–79.

10. Приходько, А. А. Создание и исследование планетарных механизмов прерывистого движения с

эллиптическими зубчатыми колесами / А. А. Приходько, А. И. Смелягин // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Машиностроение. – 2019. – № 6 (129). – С. 77–88.

I.P. Popov

Kurgan State University

SUPERPOSITION OF ROTATIONS IN MECHANISMS

The article presents a kinematic analysis of the mechanism with the addition of rotational synchronous motion. A mathematical model of complex motion has been developed, and its reliability has been substantiated. Various variants of mixed rotational motion are considered. Practical recommendations for the application of the results are presented.

Coordinates, rotation, vector, hodograph, ellipse, circle, snail.