



ПОСТРОЕНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ СОРТИРОВАЛЬНЫХ МАШИН ПО СХЕМЕ МУЛЬТИИНЕРТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В статье представлена методика расчета мультиинертного осциллятора. Методика может применяться для разработки вибросортировальных машин с неограниченным числом массивных рабочих органов, которые широко востребованы в настоящее время. Построение их привода по схеме мультиинертного осциллятора позволит исключить развитие непроизводительной реактивной механической и электрической мощностей для повышения энергоэффективности машин, а также обеспечит их балансировку. В мультиинертном осцилляторе колебания обусловлены взаимным преобразованием кинетических энергий грузов без использования пружин.

Осциллятор, инертный, гармонический, реактивность, пространственный сдвиг, фазовый сдвиг, кинетическая энергия.

Для разгрузки приводов механизмов от реактивной нагрузки при возвратно-поступательных движениях массивных рабочих органов используют схему маятника, при которой колебания обуславливаются взаимным преобразованием кинетической энергии груза в потенциальную энергию пружины [1–7].

Существуют системы, в которых кинетическая энергия груза преобразуется в другие виды энергии [8].

В связи с тем, что кинетическая энергия может трансформироваться в самые разнообразные виды энергии, возникает задача создания осциллятора, в котором кинетическая энергия одного груза может преобразовываться в кинетическую же энергию других грузов. Решение этой задачи составляет предмет настоящей работы.

Синтез колебательной системы. Пусть в плоскости Z имеются не две, а n координатных осей Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n , образующих центрально симметричную звезду с центром в точке O . Угол между осями составляет $2\pi/n$. Из начала координат O отложен вектор \mathbf{R} . Направление вектора произвольное. $\mathbf{R} \subset Z$. Для этих условий имеют место следующие обстоятельства.

1. Отрезки, соединяющие координаты x_1, x_2, \dots, x_n вектора \mathbf{R} в системе координат Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n образуют правильный n -угольник.

2. Размер n -угольника не зависит от ориентации вектора \mathbf{R} .

3. Середина вектора \mathbf{R} совмещена с центром n -угольника.

В этом нетрудно убедиться. Вектор \mathbf{R} имеет координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi, \quad x_2 = R \cos \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right), \\ x_3 &= R \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_i &= R \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right], \\ x_n &= R \cos \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с теоремой косинусов

$$\begin{aligned} (x_i, x_{i+1}) &= R^2 \left\{ \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \cos^2 \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \cos \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \right\} = \\ &= R^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi - \frac{\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right)^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. - 2 \left[\cos \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \right\} = \\ &= R^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\cos\frac{i\pi}{n}\cos\varphi\sin\frac{i\pi}{n}\sin\varphi - 2\cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n}\cos^2\varphi - \\
& -2\cos^2\frac{\pi}{n}\sin\frac{i\pi}{n}\sin\varphi\cos\frac{i\pi}{n}\cos\varphi - \\
& -2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cos^2\varphi\cos\frac{i\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + \\
& +2\sin\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n}\sin\varphi\cos\varphi\cos\frac{\pi}{n} - \\
& -2\cos^2\frac{\pi}{n}\cos\frac{i\pi}{n}\cos\varphi\sin\frac{i\pi}{n}\sin\varphi - \\
& -2\cos^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}\sin^2\varphi - 2\sin\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}\cos\varphi\sin\varphi\cos\frac{\pi}{n} + \\
& +2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{i\pi}{n}\sin^2\varphi\sin\frac{i\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \\
& = R^2\left[\cos^2\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n} + \cos^2\frac{i\pi}{n}\right) + \right. \\
& \left. + \sin^2\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n} + \sin^2\frac{i\pi}{n}\right)\right] = \\
& = R^2\left[\cos^2\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n} + \sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n}\right) + \right. \\
& \left. + \sin^2\varphi\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{i\pi}{n} + \sin^2\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}\right)\right] = \\
& = R^2\left[\cos^2\varphi\sin^2\frac{\pi}{n}\left(\sin^2\frac{i\pi}{n} + \cos^2\frac{i\pi}{n}\right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \sin^2\varphi\sin^2\frac{\pi}{n}\left(\cos^2\frac{i\pi}{n} + \sin^2\frac{i\pi}{n}\right)\right] = \\
& = R^2\left(\cos^2\varphi\sin^2\frac{\pi}{n} + \sin^2\varphi\sin^2\frac{\pi}{n}\right) = \\
& = R^2\sin^2\frac{\pi}{n}\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = R^2\sin^2\frac{\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что все стороны n -угольника одинаковы по длине. При этом их длина не является функцией φ , т.е. не зависит от ориентации вектора \mathbf{R} .

Далее середина вектора \mathbf{R} обозначается r . В соответствии с теоремой косинусов

$$\begin{aligned}
(x_i r)^2 &= R^2\left\{\cos^2\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right] + \frac{1}{4} - \right. \\
& \left. - 2\cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right]\frac{1}{2}\cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi\right]\right\} = \frac{R^2}{4}.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что все отрезки, связывающие точку r с вершинами n -угольника, имеют одинаковую длину. Это означает, что n -угольник является правильным и точка r совпадает с его центром.

Таким образом, указанные выше три обстоятельства имеют место, что позволяет определить конфигурацию мультиинертного осциллятора, упрощенная схема которого показана на рисунке.

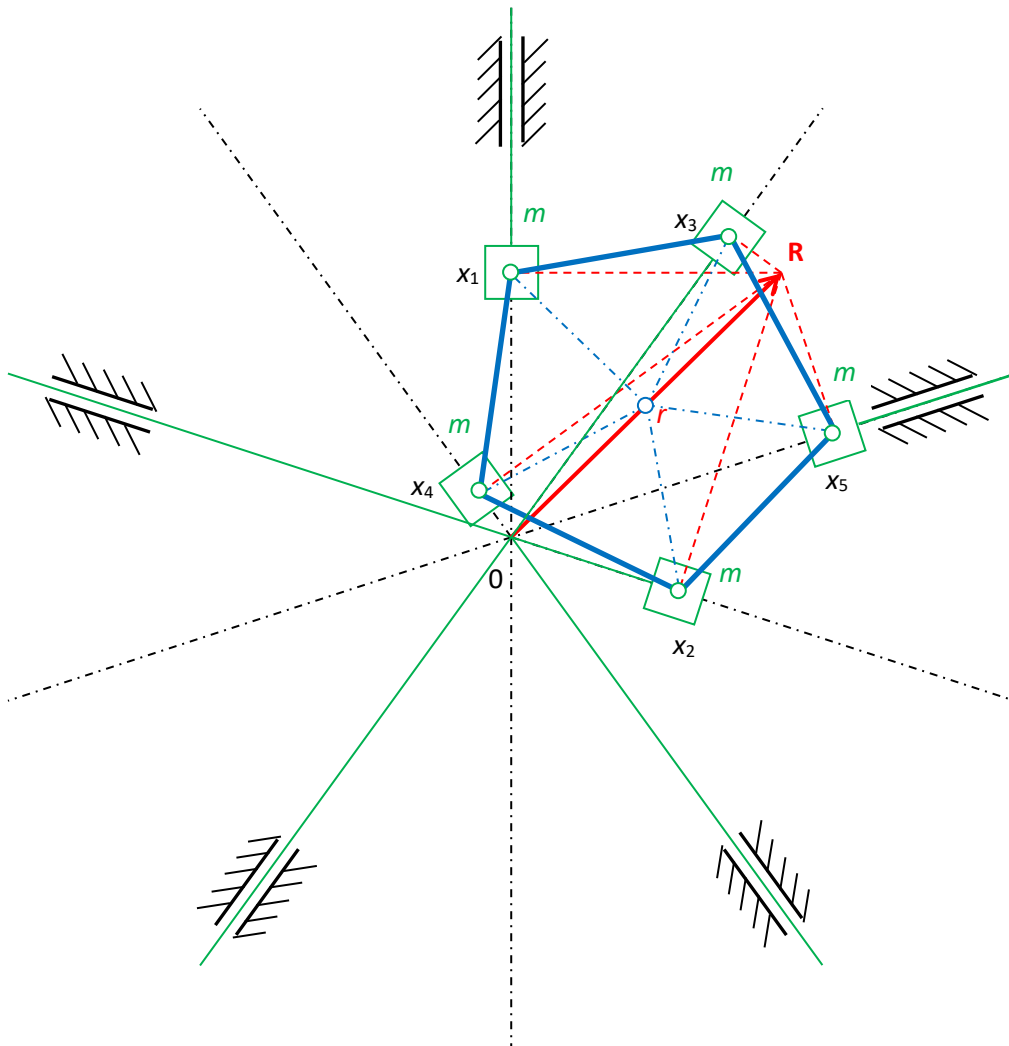


Рис. Мультиинертный осциллятор

Для целей аналитического описания вершины правильного многоугольника рассматривались в одной плоскости Z . Для инженерных целей траектории грузов (решетных станов) не должны пересекаться, поэтому грузы и их направляющие расположены в параллельных плоскостях подобно цилиндрам, шатунам и кривошипам в кривошипно-шатунном механизме. Для обеспечения этого, например, стержень x_1, x_3 закреплен «сверху» (ближе) груза, находящегося в координате x_1 , а стержень x_1, x_4 – «снизу» (далее, на рисунке не показано).

Анализ колебательной системы. Внешние силы к системе не приложены. Скорости инертных тел массой m каждое определяются как производные их координат. В соответствии с (1)–(2)

$$\frac{dx_1}{dt} = -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt} = R \sin \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = R \sin \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = R \sin \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_n}{dt} = R \sin \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для того чтобы в системе происходили свободные гармонические колебания, необходимо чтобы ее полная энергия оставалась постоянной. В данном случае полная энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \left\{ \sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) + \dots + \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \dots + \sin^2 \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

При $n \geq 2$ имеет место выражение:

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}. \quad (4)$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}.$$

Если вдоль координатных осей $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ отложить единичные векторы, то их сумма вследствие центральной симметрии будет равна нулю. Следовательно, сумма проекций этих единичных векторов на любую из осей $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ также будет нулевой. По этой причине последние две суммы тождественно равны нулю.

Таким образом, выражение (4) справедливо.

Замечание. При $n=2$ выражение (4) приобретает известный вид:

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Аналогичным образом при $n \geq 2$ имеет место выражение:

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}$$

С учетом выражения (4) полная (она же кинетическая) энергия (3) равна

$$T = \frac{1}{4} n m R^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \text{const}.$$

Из последнего выражения следует

$$\frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \quad \varphi = C_1 t + C_2.$$

Начальные условия для фазы и угловой скорости:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Отсюда $C_2 = \varphi_0$, $C_1 = \omega_0$.

Формулы для координат грузов (1)–(2) принимают вид:

$$x_1 = R \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad x_2 = R \cos \left(\frac{\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right),$$

$$x_3 = R \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right),$$

$$x_i = R \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right],$$

$$x_n = R \cos \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right].$$

Начальные условия для перемещения и линейной скорости:

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \frac{dx_1}{dt}(0) = v_{10}.$$

Отсюда

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_{10}}{R}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}},$$

$$-R \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = v_{10},$$

$$\omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \quad (5)$$

Инертные тела (решетные станы) массой m каждое осуществляют гармонические колебания, обусловленные взаимным обменом кинетической энергией. Потенциальная энергия пружин для этого не требуется. При этом мультиинертный осциллятор является сбалансированным механизмом [9].

Колебания тел (решетных станов) являются свободными.

Особенностью мультиинертного осциллятора является то, что частота его свободных колебаний (5) не фиксирована и определяется преимущественно начальными условиями. Эта особенность может оказаться весьма полезной для технических приложений, например для самонейтрализации механической реактивной (инерционной) мощности.

n -угольник x_1, x_2, \dots, x_n осуществляет сложное движение – орбитальное вращение вокруг центра координат O и спиновое вращение вокруг своей оси, проходящей через центр r .

При этом каждый груз совершает *линейные гармонические колебания* вдоль своей направляющей. Его координата изменяется от $+R$ до $-R$.

При расположении направляющих грузов (решетчатых станков) не в виде звезды, а параллельно друг другу, углы между соответствующими кривошипами необходимо составят $360/n$ градусов.

Указанные особенности мультиинертного осциллятора позволяют использовать его схему при разработке вибросортировальных машин с неограниченным числом массивных рабочих органов. Некоторые вибрационные сортировальные машины имеют более трех решетчатых станков. Построение их по схеме мультиинертного осциллятора позволит существенно сократить потребление энергии, которая в этом случае *не будет* расходоваться на сообщение массивным решетчатым станкам колебательных движений (около 90 % полной мощности [10]), а будет направлена только на компенсацию трения и на совершение полезной работы.

Литература

1. Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности виброприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.

2. Thompson, W. T. Theory of Vibrations / Thompson, W. T. – Nelson Thornes Ltd. – 1996. – 295 p.

3. Inman, Daniel J. Engineering Vibration / Inman, Daniel J. – Prentice Hall, – 2001. – 418 p.

4. Tongue, Benson Principles of Vibration. – Oxford University Press, – 2001. – 367 p.

5. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.

6. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 4 (6). – Ч. 1. – С. 21–25.

7. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 1 (7). – Ч. 2. – С. 27–32.

8. Попов, И. П. Инертно-индуктивный осциллятор / Попов И. П., Сарапулов Ф. Н., Сарапулов С. Ф. // Вестник Курганского государственного университета. Технические науки. – Вып. 8. – 2013. – № 2 (29). – С. 80–81.

9. Попов, И. П. Самобалансировка вибрационных механизмов / Попов, И. П. // Вестник Вологодского государственного университета. – 2018. – № 2 (2). – С. 16–19.

10. Попов, И. П. Производительная мощность при сортировке сыпучих материалов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 1 (7). – С. 70–72.

I.P. Popov
Kurgan State University

CONSTRUCTION OF VIBRATING SORTING MACHINES ON THE SCHEME OF A MULTI-INERT OSCILLATOR

The article presents a method for calculating a multi-inert oscillator. The technique can be used to develop vibrating sorting machines with an unlimited number of massive working bodies which are in wide demand nowadays. The construction of their drive according to the scheme of a multi-inert oscillator will eliminate the development of unproductive reactive mechanical and electrical power to increase the energy efficiency of machines, and will also ensure their balancing. In a multi-inert oscillator, oscillations are caused by the mutual transformation of the kinetic energies of the weights without the use of springs.

Oscillator, inert, harmonic, reactivity, spatial shift, phase shift, kinetic energy.