



## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНЕРТНОГО ТРИПЛЕТНОГО МАЯТНИКА В ВИБРАЦИОННЫХ СОРТИРОВАЛЬНЫХ МАШИНАХ

В статье представлена методика расчета инертного триплетного маятника. Методика может применяться для разработки вибросортировальных машин с тремя массивными рабочими органами, которые широко востребованы в настоящее время. Построение их привода по схеме инертного триплетного маятника позволит исключить развитие непроизводительной реактивной механической и электрической мощностей для повышения энергоэффективности машин, а также обеспечит их балансировку. В инертном триплетном маятнике колебания обусловлены взаимным преобразованием кинетических энергий грузов. В отличие от традиционных колебательных систем частоты свободных колебаний колебательных систем с однородными элементами не зависят от параметров элементов систем и определяются исключительно начальными условиями, благодаря чему они могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Вибросортировальные машины, маятник, привод, энергоэффективность, балансировка, мощность.

В существующих вибрационных сортировальных машинах часто используют два массивных рабочих органа, колебания которых вместе с сыпучим материалом осуществляются в противофазе, что приводит к развитию существенной непроизводительной реактивной механической мощности, которая трансформируется в реактивную электрическую мощность питающей сети, оказывая отрицательное влияние на энергоэффективность машин. Смещение фаз колебаний рабочих органов на девяносто градусов приводит к полной самонейтрализации этой мощности. По существу такая конструкция представляет собой биинертный осциллятор [1], который имеет два принципиальных отличия от традиционных колебательных систем, используемых в настоящее время в машиностроении, – пружинного маятника и электрического колебательного контура [2–7]. Первое заключается в том, что биинертный осциллятор состоит из однородных (инертных) элементов, поэтому качество энергии при энергообмене не меняется, а именно, кинетическая энергия одного элемента преобразуется в кинетическую же энергию другого. Второе – в том, что частоты свободных колебаний биинертного осциллятора не зависят от его параметров и определяются исключительно начальными условиями, благодаря чему он может совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Представляет интерес возможность моделирования инертного триплетного маятника, во-первых, в связи с увеличением числа колеблющихся элементов (в настоящее время востребованы вибросортировальные машины с тремя массивными рабочими органами), а во-вторых, и главным образом, в связи с тем, что биинертный осциллятор не сбалансирован по силам инерции из-за своей асимметрии, что может быть легко реализовано для инертного триплетного маятника.

### Синтез инертного триплетного маятника.

Пусть три координатные оси ( $0x_1, 0x_2, 0x_3$ ) лежат в одной плоскости  $Z$ , последовательно повернуты относительно друг друга на  $\pi/3$  и пересекаются в одной точке. Точка пересечения  $O$  является началом произвольно направленного вектора  $\mathbf{R}$ , принадлежащего  $Z$  [8].

**Теорема 1.** Координаты  $x_1, x_2, x_3$  проекций конца вектора  $\mathbf{R}$  на оси  $0x_1, 0x_2, 0x_3$  являются вершинами равностороннего треугольника, размер которого не зависит от направления  $\mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Координаты проекций:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi, \\ x_2 &= R \cos(\pi/3 - \varphi), \\ x_3 &= R \cos(2\pi/3 - \varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – угол между  $\mathbf{R}$  и  $0x_1$ . В соответствии с теоремой косинусов

$$\begin{aligned} (x_1 x_2)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(\pi/3 - \varphi) - \\ &\quad - 2 \cos \varphi \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] = \\ &= R^2 \left[ \cos^2 \varphi + \left( \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \varphi \left( \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\ &= R^2 \left[ \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2. \\ (x_1 x_3)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - \\ &\quad - 2 \cos \varphi \cos(2\pi/3 - \varphi) \cos(2\pi/3)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R^2 \left[ \cos^2 \varphi + \left( -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2 \cos \varphi \left( -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \right] = \\
& R^2 \left[ \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2. \\
& (x_2 x_3)^2 = R^2 [\cos^2(\pi/3 - \varphi) + \cos^2(2\pi/3 - \varphi) - \\
& - 2 \cos(\pi/3 - \varphi) \cos(2\pi/3 - \varphi) \cos(\pi/3)] = \\
& R^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 + \left( -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right)^2 - \right. \\
& \left. - 2 \left( \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \left( -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \frac{1}{2} \right] = \\
& R^2 \left[ \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \right] = \frac{3}{4} R^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, треугольник является равносторонним. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Центр треугольника  $x_1 x_2 x_3$  совпадает с серединой вектора  $\mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Пусть  $r$  – середина вектора  $\mathbf{R}$ . В соответствии с теоремой косинусов

$$(x_1 r)^2 = R^2 [\cos^2 \varphi + 1/4 - 2 \cos \varphi (1/2) \cos \varphi] = R^2/4.$$

$$(x_2 r)^2 = R^2 [\cos^2(\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2 \cos(\pi/3 - \varphi) (1/2) \cos(\pi/3 - \varphi)] = R^2/4.$$

$$(x_3 r)^2 = R^2 [\cos^2(2\pi/3 - \varphi) + 1/4 - 2 \cos(2\pi/3 - \varphi) (1/2) \cos(2\pi/3 - \varphi)] = R^2/4.$$

Точка  $r$  равноотстоит от точек  $x_1$  и  $x_2$ , следовательно, она расположена на прямой, перпендикулярной отрезку  $x_1 x_2$  и проходящей через его середину. Это же справедливо в отношении отрезка  $x_1 x_3$ . Таким образом, точка  $r$  принадлежит двум высотам треугольника  $x_1 x_2 x_3$ , следовательно, она лежит на их пересечении, которое для равностороннего треугольника является центром. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют определить конфигурацию инертного триплетного маятника, упрощенная схема которого показана на рисунке.

**Анализ инертного триплетного маятника.** Внешние усилия к грузам не приложены. Массы связующих элементов и трение не учитываются. Скорости грузов с учетом (1) равны

$$dx_1/dt = -R \sin \varphi d\varphi/dt,$$

$$dx_2/dt = R \sin(\pi/3 - \varphi) d\varphi/dt,$$

$$dx_3/dt = R \sin(2\pi/3 - \varphi) d\varphi/dt.$$

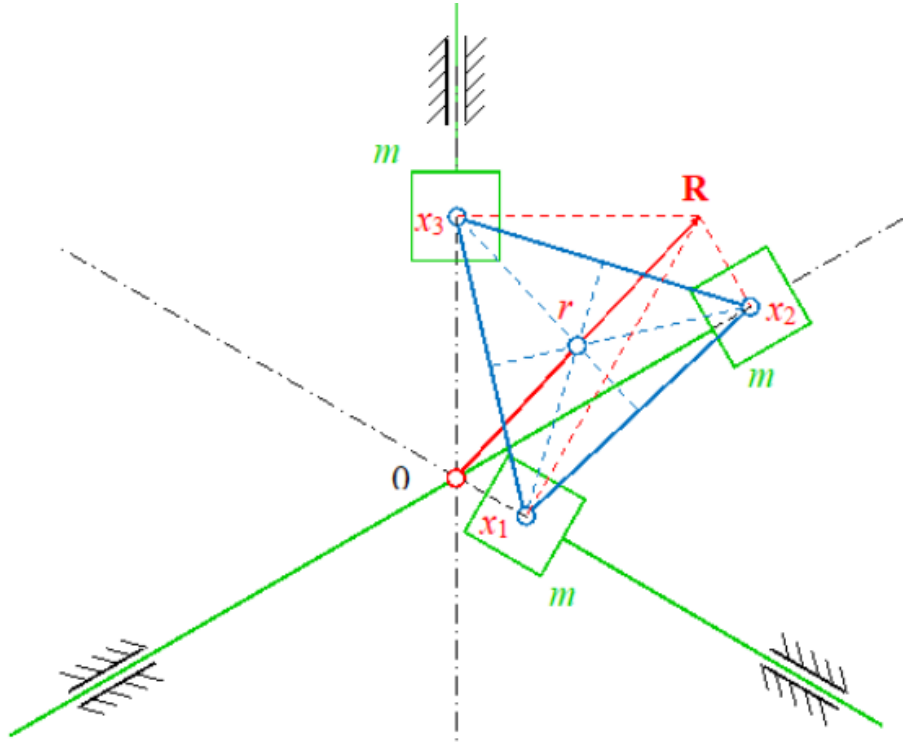


Рис. Инертный триплетный маятник

Условием возникновения свободных гармонических колебаний является неизменность полной, в рассматриваемом случае кинетической, энергии системы [9]

$$T = 0,5mR^2[\sin^2\varphi + \sin^2(\pi/3 - \varphi) + \sin^2(2\pi/3 - \varphi)](d\varphi/dt)^2 = \\ = 0,75mR^2(d\varphi/dt)^2 = \text{const.}$$

$$d\varphi/dt = C_1,$$

$$\varphi = C_1t + C_2.$$

Пусть начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Тогда  $C_2 = \varphi_0, C_1 = \omega_0.$

При этом (1) принимает вид:

$$x_1 = R\cos(\omega_0t + \varphi_0),$$

$$x_2 = R\cos(\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0),$$

$$x_3 = R\cos(2\pi/3 - \omega_0t - \varphi_0). \quad (2)$$

Пусть  $x_1(0) = x_{10}, (dx_1/dt)(0) = v_{10}.$  Тогда

$$\cos\varphi_0 = x_{10}/R,$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}.$$

$$-R\omega_0\sin(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = v_{10},$$

$$\omega_0 = -\frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}.$$

Таким образом, все три груза совершают свободные гармонические колебания, обмениваясь между собою кинетической энергией.

Из уравнений (2) следует, что радиус-вектор  $\mathbf{R}$  равномерно вращается с угловой циклической скоростью  $\omega.$

Треугольник, образованный шатунами, вращается вокруг точки  $r$  и одновременно с радиус-вектором  $\mathbf{R}$  – вокруг точки  $0.$

При свободных гармонических колебаниях грузов, условием которых является отсутствие трения, необходимости в кривошипе  $0r$  не возникает.

При наличии трения кривошип  $0r$  необходим для подвода энергии от внешнего привода с целью компенсации ее диссипации [10]. При этом привод не

совершает работу, направленную на сообщение грузам гармонических ускорений.

Указанные особенности инертного триплетного маятника позволяют использовать его схему при разработке вибросортировальных машин с тремя массивными рабочими органами, что позволит исключить развитие непроизводительной реактивной механической и электрической мощностей для повышения энергоэффективности машин, а также обеспечит их балансировку.

## Литература

1. Попов И. П. Самобалансировка вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2018. – № 2 (2). – С. 16–19.
2. Tongue, Benson Principles of Vibration. – Oxford University Press, 2001. – 367 p.
3. Thompson, W. T. Theory of Vibrations / Thompson, W. T. – Nelson Thornes Ltd., 1996. – 295 p.
4. Inman, Daniel J. Engineering Vibration / Inman, Daniel J. – Prentice Hall, 2001. – 418 p.
5. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
6. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 4 (6). – Ч. 1. – С. 21–25.
7. Попов, И. П. Исследование вынужденных колебаний механических систем / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2020. – № 1 (7). – Ч. 2. – С. 27–32.
8. Попов, И. П. Выбор систем отсчета в задачах управления движущимися инертными объектами / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 1 (3). – С. 20–22.
9. Попов, И. П. Диссипативная, реактивная и полная мощности виброприводов машин / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 3 (5). – С. 72–74.

*I.P. Popov*

*Kurgan State University*

## USE OF INERT TRIPLET PENDULUM IN VIBRATION SORTING MACHINES

The article presents the calculation method of an inert triplet pendulum. The technique can be used to develop vibration sorting machines with three massive working bodies which are widely in demand today. The construction of their drive according to the inert triplet pendulum scheme will eliminate the development of unproductive reactive mechanical and electrical capacities to increase the energy efficiency of machines, as well as ensure their balance. In an inert triplet pendulum, the oscillations are due to the mutual conversion of the kinetic energies of the weights. Unlike traditional oscillatory systems, the frequencies of free oscillations of oscillatory systems with homogeneous elements do not depend on the parameters of the systems elements and are determined exclusively by the initial conditions, and as a result they can make free harmonic oscillations with any initially given frequency.

Vibration sorting machines, pendulum, drive, energy efficiency, balancing, power.