УДК 519.25

***Ш.М. Мухамеджонова[1], А.Б. Назимов[2]***
*[1]Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,*
*[2]Вологодский государственный университет*

# БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ БОЛЬШИХ МАССИВОВ ДАННЫХ

Рассматривается пример алгоритма обработки информации на основе системы линейных алгебраических уравнений с циркулянтной, перциркулянтной и нейтрального типа матрицами, которые могут быть решены с помощью дискретного преобразования Фурье.

Обработка информации, система, методика, циркулянтная матрица, перциркулянтная матрица, матрица нейтрального типа, матрица Фурье, быстрое преобразование Фурье, массивы данных.

В ряде случаев при обработке больших массивов данных с несколькими неизвестными значениями прибегают к системам линейных алгебраических уравнений. В данном случае предлагается использовать алгоритм решения на основе преобразований Фурье.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрица которых имеет специальную структуру, можно выполнить с использованием быстрого преобразования Фурье. Под специальной структурой матрицы понимается её циркулянтность, перциркулянтность и их сумма. Решение СЛАУ порядка $N$ методом Гаусса использует $O\left(N^3\right)$ операции умножения. Для решения СЛАУ с циркулянтной [1] и перциркулянтной матрицами или матрицей нейтрального типа [2] это число можно довести до $O\left(N\log_2 N\right)$.

**1. Решение циркулянтной системы.** Квадратная матрица $A=\left[a_{mn}\right]_{N\times N}$ называется **циркулянтной** матрицей порядка $N$, если равенство $a_{m'n'}=a_{m''n''}$ имеет место при выполнении условия

$$m'-n'\equiv m''-n''\left(\operatorname{mod} N\right)\cdot \qquad (1)$$

Циркулянтную матрицу обозначим буквой $C=C_N$. СЛАУ с циркулянтной матрицей назовём **циркулянтной** системой. Циркулянтная матрица четвёртого порядка $\left(N=4\right)$ имеет вид

$$C=C_4=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что, имея только первую строку циркулянтной матрицы, однозначно можно восстановить остальные её строки.

Если вместо равенства (1) требовать выполнение равенства

$$m'+n'\equiv m''+n''\left(\operatorname{mod} N\right),$$

то матрица $A=\left[a_{mn}\right]_{N\times N}$ называется **перциркулянтной** матрицей порядка $N$. Перциркулянтную матрицу обозначим буквой $P=P_N$. СЛАУ с перциркулянтной матрицей назовём **перциркулянтной** системой. Перциркулянтная матрица четвёртого порядка $\left(N=4\right)$ имеет вид

$$P=P_N=\begin{bmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & p_2 \\ p_0 & p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Если дана первая строка перциркулянтной матрицы, можно восстановить все её остальные строки.

Квадратная матрица $A=\left[a_{mn}\right]_{N\times N}$ называется **матрицей нейтрального типа** порядка $N$, если она является суммой циркулянтной и перциркулянтной матриц порядка $N$. СЛАУ с матрицей нейтрального типа назовём **системой нейтрального типа**.

Две квадратные матрицы $A$ и $B$ порядка $N$ называются **подобными**, если найдется такая обратимая матрица $U$, что $B=U^{-1}AU$.

**Теорема 1.** *Пусть $C$ – произвольная циркулянтная матрица. Матрица $C$ подобна диагональной матрице и матрицей, приводящей её к диагональному виду, является матрица Фурье $U=F$:*

$$F=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} w_0^0 & w_0^1 & w_0^2 & \dots & w_0^{N-1} \\ w_1^0 & w_1^1 & w_1^2 & \dots & w_1^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{N-1}^0 & w_{N-1}^1 & w_{N-1}^2 & \dots & w_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где числа $w_m=e^{-i\frac{2\pi}{N}m}$, $m=\overline{0,\ N-1}$.

Матрица Фурье $F$, определённая равенством (2), является унитарной, то есть её сопряженная совпадает с обратной матрицей: $F^*=F^{-1}$.

**Доказательство.** Непосредственным вычислением проверяется справедливость равенства

$$F^*QF=\operatorname{diag}\left(w_0,w_1,\dots w_{N-1}\right)\equiv\begin{bmatrix} w_0 & & & \\ & w_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $Q$ – так называемая **матрица перестановок**; она и ее степени имеют следующие представления:

$$Q=\left[\begin{array}{c|c}0 & E_{N-1}\\ \hline E_1 & 0\end{array}\right],\ldots,Q^k=\left[\begin{array}{c|c}0 & E_{N-k}\\ \hline E_k & 0\end{array}\right],\ldots,$$

$$,Q^k=\left[\begin{array}{c|c}0 & E_{N-k}\\ \hline E_k & 0\end{array}\right],\ldots,Q^{N-1}=\left[\begin{array}{c|c}0 & E_1\\ \hline E_{N-1} & 0\end{array}\right],\quad Q^N=E_N$$

а $E_k$ – единичная матрица порядка $k$.

Если $c_0,c_1,\ldots,c_{N-1}$ – элементы первой строки циркулянтной матрицы $C$ порядка $N$, то справедливо равенство

$$C=c_0E+c_1Q+c_2Q^2+\ldots+c_{N-1}Q^{N-1}=\sum_{k=0}^{N-1}c_kQ^k. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает справедливость утверждения теоремы:

$$F^*CF=F^*\sum_{k=0}^{N-1}c_kQ^kF=\sum_{k=0}^{N-1}c_kF^*Q^kF=\sum_{k=0}^{N-1}c_k\left(F^*QF\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}c_k\begin{bmatrix}w_0 & & & \\ & w_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{N-1}\end{bmatrix}^k=\sum_{k=0}^{N-1}c_k\begin{bmatrix}w_0^k & & & \\ & w_1^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_{N-1}^k\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}c_kw_0^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{N-1}c_kw_1^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{N-1}c_kw_{N-1}^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{N-1}\end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_m=\varphi(w_m),\qquad \varphi(w)=\sum_{k=0}^{N-1}c_kw^k.$$

Теорема 1 доказана.

Алгоритм быстрого решения циркулянтной системы

$$Cx=b, \quad (6)$$

основанный на методе Фурье, начинается с замены этой системы на две системы:

$$F^*CFy=F^*b, \quad (7)$$

$$F^*x=y. \quad (8)$$

Шаг 1. Вычислить $F^*b$ (обратное преобразование Фурье с вектором $b$).

Шаг 2. Вычислить $F^*CF$ (прямое преобразование Фурье с первой строкой матрицы $C$).

Шаг 3. Найти неизвестный вектор $y$ из системы (7); матрица коэффициентов этой системы является диагональной матрицей, и она содержится в правой части (5).

Шаг 4. Найти неизвестный вектор $x$ из системы (8) по формуле $x=Fz$ (прямое преобразование Фурье с вектором $z=\frac{1}{\sqrt{N}}y$).

Оценим (по порядку) количество арифметических операций в предложенном алгоритме. Прямое и обратное преобразования Фурье можно осуществить за $O(N\log_2 N)$ арифметических операций. Поэтому на выполнение шагов 1, 2 и 4 потребуется $O(N\log_2 N)$ арифметических операций. Выполнение шага 3 требует всего $O(N)$ арифметических операций. Таким образом, решение циркулянтной системы (6) можно осуществить за $O(N\log_2 N)$ арифметических операций.

**2. Решение перциркулянтной системы.** Простейшим примером перциркулянтной матрицы порядка $N$ является так называемая **матрица отражения**

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & & \iddots & \iddots & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 0 & \iddots & \iddots & & 0\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix}. \quad (9)$$

Если переставить все столбцы (строки) матрицы отражения в обратном порядке, то получится единичная матрица порядка $N$. Матрица отражения (9) удовлетворяет следующим равенствам:

$$R^2=E,\qquad R^{\mathrm{T}}=R,\qquad R^{-1}=R.$$

Справедливость этих равенств проверяется непосредственно.

С помощью матрицы отражения можно сформулировать простой признак перциркулянтности матрицы. Из определения перциркулянтной матрицы получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** 1) *Квадратная матрица $P$ порядка $N$ является перциркулянтной тогда и только тогда, когда любая из матриц $RP$ или $PR$ является циркулянтной.*

2) *Квадратная матрица $C$ порядка $N$ является циркулянтной тогда и только тогда, когда любая из матриц $RC$ или $CR$ является перциркулянтной.*

Заметим, что матрицы $RP$ и $PR$ являются или не являются циркулянтными одновременно.

Теорема 2 показывает, что умножение на матрицу отражения есть взаимно однозначное соответствие между множествами циркулянтных и перциркулянтных матриц одного и того же порядка.

Дискретное преобразование Фурье матриц отражения является важным моментом разработки быстрого алгоритма решения систем с перциркулянтными матрицами. Положим:

$$\mathrm{pd}(\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{N-1})=\left[\begin{array}{c|ccc}\mu_0 & 0 & \ldots & 0\\ \hline 0 & 0 & & \mu_1\\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & \mu_{N-1} & & 0\end{array}\right]. \quad (10)$$

Пусть $R$ – матрица отражения и $F$ – матрица Фурье порядка $N$. Тогда

$$F^*RF=pd\left(w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{N-1}\right),$$

где $w_k$, N – все корни степени из единицы.

**Теорема 3.** *Пусть* $\left(p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{N-1}\right)$ *– первая строка перциркулянтной матрицы $P$. Тогда*

$$F^*PF=\mathrm{pd}\left(\mu_0,\ \mu_1,\ldots,\ \mu_{N-1}\right),$$

*где матрица* $\mathrm{pd}(\ldots)$ *– определена в* (10), а

$$\mu_k = w_k \psi(w_k), \qquad \psi(w) = \sum_{k=0}^{N-1} p_{N-1-k} w^k.$$

Рассмотрим СЛАУ

$$Px = f, \qquad (11)$$

где $P$ – перциркулянтная матрица порядка $N$, $f \in C^N$ – заданный, а $x \in C^N$ – искомый векторы.

Быстрый алгоритм решения системы (11) связан с заменой этой системы на две системы:

$$F^*PFy = F^*f, \qquad (12)$$

$$x = Fy. \qquad (13)$$

В левой части системы (12) содержится двойное произведение $F^*PF$. Однако нет необходимости его выполнять. В силу теоремы 3 матрица $F^*PF$ является $\mathrm{pd}(\ldots)$ – матрицей вида (10). Поэтому требуется только вычислить значения многочлена

$$\psi(w) = p_{N-1} + p_{N-2}w + p_{N-3}w^2 + \ldots + p_1 w^{N-2} + p_0 w^{N-1}, \qquad (14)$$

где коэффициенты $p_0, p_1, \cdots, p_{N-3}, p_{N-2}, p_{N-1}$ составляют первую строку перциркулянтной матрицы $P$.

Если матрица $F$ – невырожденная, то все числа $w_m \psi(w_m)$, $m = \overline{0, N-1}$ являются ненулевыми и решение системы (15) находится по формулам

$$y_0 = \frac{\left[F^*f\right]_0}{w_0 \psi(w_0)}; \quad y_m = \frac{\left[F^*f\right]_{N-m}}{w_m \psi(w_m)}, \quad m = \overline{1, N-1}, \qquad (15)$$

где $y_m$ и $\left[F^*f\right]_m$ являются $m$ -ми координатами векторов $y$ и $F^*f$, соответственно.

Координаты $x_m$ искомого вектора $x$ – решения системы (13) –вычисляются как значения многочлена

$$\psi_1(w) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(y_0 + y_1 w + y_2 w^2 + \ldots + y_{N-1} w^{N-1}\right), \qquad (16)$$

при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ – корнях $N$-ой степени из единицы.

Таким образом, по предложенному алгоритму требуется вычислить значения многочленов $\varphi(w)$ и $\varphi_1(w)$ при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ и один раз произвести серию делений (15). Если для выполнения делений (15) требуется $N$ операций деления, то непосредственное вычисление значений многочленов (14) и (16) при $w = w_m$, $m = \overline{0, N-1}$ требует использования $N^2$ (по порядку) операций умножения. Однако применение алгоритма дискретного преобразования Фурье позволяет этот порядок понизить до $N \log_2 N$ операций умножения.

**3. Решение системы нейтрального типа.** Как было отмечено выше, если $P$ – перциркулянтная матрица, то матрица $PR$ является циркулянтной. Поэтому решение СЛАУ $Px = f$ с перциркулянтной матрицей $P$ сводится к решению СЛАУ $Cy = g$ с циркулянтной матрицей $C$. При этом циркулянтная матрица $C$ получается из перциркулянтной матрицы $P$ путем перестановки ее столбцов в обратном порядке: $C = PR$, где $R$ – матрица отражения. Аналогичной перестановкой координат получается вектор $g$ из заданного вектора $f: g = Rf$. Таким образом, если бы проблема состояла только в решении перциркулянтной системы, то не было бы необходимости в разработке собственного метода решения перциркулянтных систем, представленного в предыдущем пункте. Было бы достаточно использовать метод, разработанный для циркулянтной системы.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = f$, где матрица $A$ состоит из суммы циркулянтной матрицы $C$ и перциркулянтной матрицы $P$: $A = C + P$.

Переставляя столбцы матрицы $P$ в обратном порядке превратим ее в циркулянтную матрицу. В то же время это действие превращает циркулянтную матрицу $C$ в перциркулянтную. Поэтому приведенное выше замечание не позволяет разработать быстрое решение СЛАУ $Cx + Px = f$, исходя только из дискретного преобразования Фурье циркулянтной матрицы. Все это указывает на важность непосредственного преобразования перциркулянтной матрицы методом дискретного преобразования Фурье.

Рассмотрим циркулянтную и перциркулянтную матрицы $C$ и $P$ с первыми строками

$$\left(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}\right), \qquad \left(p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}\right), \qquad (17)$$

соответственно. Положим:

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^k, \quad \lambda_m = \varphi(w_m), \quad m = \overline{0, N-1}, \qquad (18)$$

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{N-1-k} w^k, \quad \mu_m = w_m \psi(w_m), \; m = \overline{0, N-1}. \qquad (19)$$

**Теорема 4.** *Пусть* $C$ *и* $P$ *– циркулянтная и перциркулянтная матрицы, с первыми строками* (17)*, соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$F^*(C+P)F = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) + \mathrm{pd}(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}),$$

*где* $\lambda_m$ *и* $\mu_m$ *определены в* (18) *и* (19).

Отметим структуру матрицы $F^*(C+P)F$ в зависимости от четности и нечетности порядка этих матриц.

Если $N = 2M + 1$ – нечетное число, то

$$F^*(C+P)F = \left[\begin{array}{c|cccccc}
\lambda_0 + \mu_0 & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_M & \mu_M & & \\
 & & & \mu_{M+1} & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M} & & & & & \lambda_{2M}
\end{array}\right],$$

если $N = 2M$ – четное число, то

$$F^*(C+P)F = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
\lambda_0 + \mu_0 & & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_{M-1} & & \mu_{M-1} & & \\
 & & & & \lambda_M + \mu_M & & & \\
 & & & \mu_{M+1} & & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M-1} & & & & & & \lambda_{2M-1}
\end{array}\right].$$

В обеих матрицах ненулевые элементы расположены на двух диагоналях, которые обозначены многоточием, а все остальные элементы равны нулю.

Алгоритм быстрого решения СЛАУ

$$Ax = b, \qquad (20)$$

где $A = C + P$ – матрица нейтрального типа порядка $N$, основан на утверждении теоремы 4. Для этого заменим СЛАУ (20) на две системы:

$$F^*(C+P)Fy = F^*b \qquad (21)$$

$$x = Fy. \qquad (22)$$

Система (21) распадается на отдельные системы второго порядка и одно или два уравнения с одним неизвестным. Это зависит от четности и нечетности числа $N$.

Если $N = 2M + 1$ – то есть нечетно, то система (21) распадается на одно уравнение с одним неизвестным:

$$(\lambda_0 + \mu_0) y_0 = \left[F^* b\right]_0$$

и $M$ систем второго порядка:

$$\begin{cases} \lambda_k y_k + \mu_k y_{N-k} = \left[F^* b\right]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = \left[F^* b\right]_{N-k}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, M};$$

если же $N = 2M$, то есть четно, то система (21) распадается на два уравнения с одним неизвестным:

$$(\lambda_0 + \mu_0) y_0 = \left[F^* b\right]_0,$$

$$(\lambda_M + \mu_M) y_M = \left[F^* b\right]_M$$

и на $M-1$ систем второго порядка

$$\begin{cases} \lambda_k y_k + \mu_k y_{N-k} = \left[F^* b\right]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = \left[F^* b\right]_{N-k}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, M-1}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^{\mathrm{T}},$$

$$F^* b = \left(\left[F^* b\right]_0, \left[F^* b\right]_1, \dots, \left[F^* b\right]_{N-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, независимо от четности или нечетности $N$ для решения системы (21) будет использовано $O(N \log_2 N)$ операций умножения. Для нахождения искомой неизвестной $x$ из системы (22) используется такое же количество умножений (по порядку).

Таким образом, для решения СЛАУ (20) методом быстрого преобразования Фурье будет использовано $O(N \log_2 N)$ операций умножения, что позволит значительно сократить время обработки информации. Данный подход может быть полезен для обработки больших массивов данных и при разработке математических моделей с несколькими неизвестными.

**Литература**

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1966. – 576 с.

2. Метод регуляризации сдвигом: теория и приложения : монография / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. А. Морозов, М. Муллоджанов. – Вологда : ВоГТУ, 2012. – 368 с.

***Sh.M. Mukhamedzhonova, A.B. Nazimov***

**FAST PROCESSING ALGORITHMS FOR LARGE DATA SETS**

The articles considers the example of the data processing algorithm based on a system of linear algebraic equations with circular, percirculant and neutral type matrices that can be solved using the discrete Fourier transform.

Data processing, system, technique, circulant matrix, percirculant matrix, neutral type matrix, Fourier matrix, fast Fourier transform, data sets.