



## УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕРМИЧЕСКОЙ ВУЛКАНИЗАЦИИ ЭЛАСТОМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ТКАНЕВОЙ ОСНОВЕ

Одномерные математические модели нестационарной теплопроводности не всегда адекватно описывают сложные технологические процессы. К ним можно отнести процесс вулканизации покрытий из эластомера на тканевой основе. Дело в том, что в этом случае следует учитывать различные условия теплообмена через взаимно перпендикулярные плоскости исследуемого объекта. Это приводит к необходимости исследовать двухмерную модель теплопроводности. В данной работе рассматривается случай, когда теплообмен через такие плоскости происходит по закону Ньютона, но при различных значениях коэффициента теплоотдачи. В частности, подобная ситуация имеет место в вулканизационных аппаратах непрерывного действия с псевдооживленным слоем инертного зернистого теплоносителя.

Математическая модель, нестационарная теплопроводность, теплообмен, закон Ньютона, коэффициент теплоотдачи, аппарат непрерывного действия, псевдооживленный слой инертного зернистого теплоносителя.

Объектом исследования является полотно из ткани шириной  $2L$  с нанесенным на нее слоем эластомера (1) (на рис. 1 выделены серым цветом). Толщина системы ткань-эластомер составляет  $2l$ , при этом  $l$  намного меньше  $L$ . Полотно движется снизу вверх, проходя через диффузор (2) и поступая в реакционную камеру (4) с псевдооживленным слоем инертного зернистого теплоносителя (3), где сначала происходит прогрев системы ткань-эластомер, а затем процесс термической вулканизации эластомера. Ожижающим агентом при этом является нагретый воздух, который

вдувается в реакционную камеру и создает эффект псевдооживления. С помощью специальных устройств создается так называемый организованный псевдооживленный слой, который обеспечивает равномерный теплообмен по всей ширине полотна и предотвращает как высыпание псевдооживленного слоя из аппарата, так и его вынос вверх из реакционной камеры. Теплообмен через торцевую часть системы ткань-эластомер отличен от теплообмена через основную поверхность системы.

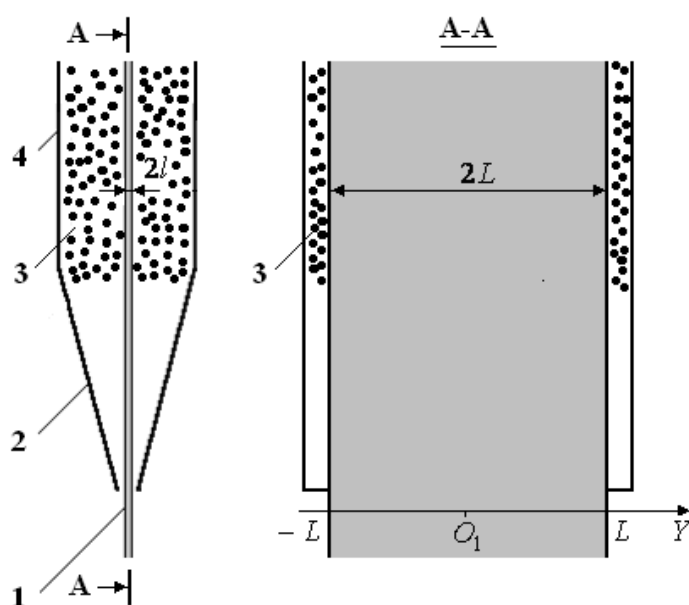


Рис. 1. Принципиальная схема вулканизационного аппарата: 1 – ткань с нанесенным на нее слоем эластомера; 2 – диффузор; 3 – псевдооживленный слой инертного зернистого теплоносителя; 4 – реакционная камера

Экспериментально доказано [1], что система ткань-эластомер за счет проникновения эластомера в основу ткани обладает практически одинаковыми теплофизическими свойствами, что позволяет считать ее однородной и, следовательно, симметричной относительно плоскости  $x=0$  (рис. 2).

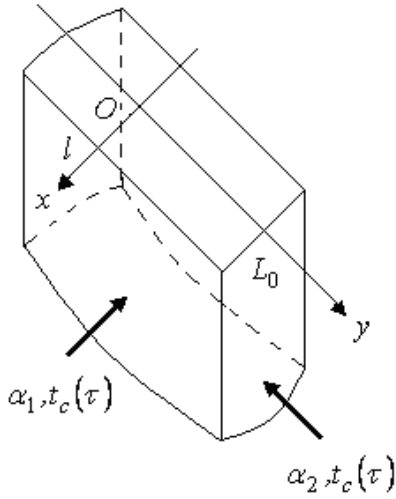


Рис. 2. Схема теплообмена в системе координат  $xOy$

Таким образом, для описания внутреннего теплопереноса в системе ткань-эластомер в рассматриваемом случае следует использовать двухмерное уравнение теплопроводности [2]

$$\frac{\partial t(x, Y, \tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t(x, Y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, Y, \tau)}{\partial Y^2} \right] + w(x, Y, \tau), \quad (1)$$

$$(0 \leq x < l; 0 \leq Y < L),$$

где  $t(x, Y, \tau), ^\circ\text{C}$  – температура в точке с координатами  $x, Y$  системы ткань-эластомер в момент времени  $\tau, \text{c}$ ;  $a$  – коэффициент температуропроводности системы,  $\text{m}^2/\text{c}$ ;  $w(x, Y, \tau)$  – приведенная мощность источника (стока) тепла,  $^\circ\text{C}/\text{c}$ .

В рассматриваемой ситуации (рис. 1) для решения уравнения (1) нужно использовать следующие краевые условия:

$$t(x, Y, 0) = f(x, Y); \quad (2)$$

$$\frac{\partial t(l, Y, \tau)}{\partial x} = \frac{\alpha_1}{\lambda} [t_c(\tau) - t(l, Y, \tau)]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(0, Y, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial t(x, L, \tau)}{\partial Y} = \frac{\alpha_2}{\lambda} [t_c(\tau) - t(x, L, \tau)]; \quad (5)$$

$$\frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial Y} = 0, \quad (6)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи от внешней среды (псевдооживленного слоя) к плоскостям  $x=l$  и  $Y=L$  соответственно,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \times ^\circ\text{C})$ ;  $t_c(\tau)$  – температура внешней среды,  $^\circ\text{C}$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности системы ткань-эластомер,  $\text{Вт}/(\text{м} \times ^\circ\text{C})$ . Очевидно, что в данном случае  $\alpha_2 < \alpha_1$ .

Условие (2) является начальным. Так как в правой части этого условия присутствует функция  $f(x, Y)$  общего вида, то такое условие позволяет использо-

вать метод кусочно-постоянных значений параметров внутреннего и внешнего переноса тепла [3].

Условия (3) и (5) являются краевыми условиями третьего рода, что соответствует закону Ньютона внешнего теплообмена.

Условия (4) и (6) отвечают отсутствию потока тепла через плоскости  $x=0$  и  $Y=0$  соответственно.

Оптимальным методом аналитического решения поставленной задачи является метод конечных интегральных преобразований [4]. Но в связи с этим возникает следующая проблема: значение размера  $L$  слишком велико (оно составляет порядка 0,5 м), что для обеспечения необходимой точности вычислений требует использовать в решении данной задачи слишком большое число членов ряда Фурье по координате  $Y$ .

Эту проблему можно решить, учитывая низкую теплопроводность системы ткань-эластомер, используя систему координат  $xOy$  (рис. 2), заменив размер  $L$  на  $L_0$ , который был бы относительно малым по величине и в то же время практически обеспечивал отсутствие переноса тепла через плоскость  $y=0$ .

Для выбора размера  $L_0$  предлагается использовать решение одномерного уравнения теплопроводности для полуограниченного тела, когда координата  $Y$  может изменяться в соответствии с двойным неравенством  $-\infty < y < L_0$  [2]:

$$t_\infty(y, \tau) = t_0 + (t_c - t_0) \times \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{L_0 - y}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \exp \left( \frac{\alpha_2 \cdot (L_0 - y)}{\lambda} + \frac{\alpha_2^2 a \tau}{\lambda^2} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha_2 \sqrt{a\tau}}{\lambda} + \frac{L_0 - y}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right]. \quad (7)$$

Решению (7) соответствуют граничные условия:

$$\frac{\partial t_\infty(L_0, \tau)}{\partial y} = \frac{\alpha_2}{\lambda} [t_c - t_\infty(L_0, \tau)];$$

$$\frac{\partial t_\infty(-\infty, \tau)}{\partial y} = 0.$$

В записи решения (7) использовано упрощенное начальное условие  $t_\infty(y, 0) = t_0 = \text{const}$  и независящее от времени значение  $t_c$  температуры внешней среды.

Решение (7) определяется двумя параметрами: задаваемым значением времени  $\tau$  и вычисляемым при этом значением  $L_0$ .

Оптимальное значение  $L_0$  можно получить из сравнения решения (7) с решением, представленным следующим выражением [3]:

$$T(y, \tau) = t_c(\tau) + \frac{2}{L_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ p(v_n, \tau) + \frac{(-1)^n L_0 Bi_2 t_c(\tau)}{v_n \sqrt{v_n^2 + Bi_2^2}} \right] \frac{(v_n^2 + Bi_2^2) \cos \left( v_n \frac{y}{L_0} \right)}{v_n^2 + Bi_2^2 + Bi_2}, \quad (8)$$

где  $Bi_2 = \alpha_2 L_0 / \lambda$  – критерий Био;  $v_n > 0$  – корни характеристического уравнения  $ctgv = v/Bi_2$ ;

$$p(v_n, \tau) = \frac{a}{L_0} Bi_2 \cos v_n \int_0^\tau t_c(\omega) e^{-a \left( \frac{v_n}{L_0} \right)^2 (\tau - \omega)} d\omega +$$

$$\left[ \int_0^{L_0} f(y) \cos \left( v_n \frac{y}{L_0} \right) dy \right] e^{-a \left( \frac{v_n}{L_0} \right)^2 \tau}.$$

Решение (8) получено при использовании следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} t(y,0) &= f(y); \\ \frac{\partial T(L_0,\tau)}{\partial x} &= \frac{\alpha_2}{\lambda} [t_c(\tau) - T(L_0,\tau)]; \\ \frac{\partial T(x,0,\tau)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

На рисунке 3 представлены графики расчетных зависимостей, полученные в соответствии с решениями (7) и (8). Решению (7) соответствует сплошная линия, а решению (8) – кружочки с крестиками внутри. Расчеты проводились для эластомера марки 533 при следующих значениях параметров:  $\tau=10$  с;  $L_0=0,1$  м;  $t_c(\tau)=t_c=100$  °C;  $\alpha_2=50$  Вт/(м<sup>2</sup>×°C). Максимальная абсолютная погрешность вычислений при этом составляла не более 0,004 °C, что свидетельствует о приемлемом выборе значения  $L_0$ .

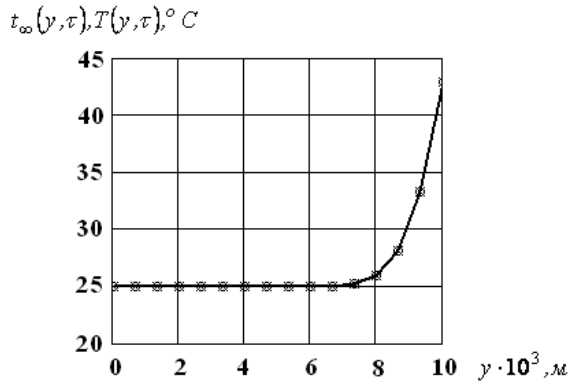


Рис. 3. Графическое представление результатов расчетов, произведенных в соответствии с решением (7) (сплошная линия) и решением (8) (кружочки с крестиками)

Решение уравнения

$$\frac{\partial W(x,y,\tau)}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 W(x,y,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y,\tau)}{\partial y^2} \right] + w(x,y,\tau) \quad (9)$$

$(0 \leq x < l; 0 \leq y < L_0)$

для краевых условий:

$$\begin{aligned} W(x,y,0) &= f(x,y); \\ \frac{\partial W(l,y,\tau)}{\partial x} &= \frac{\alpha_1}{\lambda} [t_c(\tau) - W(l,y,\tau)]; \\ \frac{\partial W(0,y,\tau)}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial W(x,L_0,\tau)}{\partial y} &= \frac{\alpha_2}{\lambda} [t_c(\tau) - W(x,L_0,\tau)]; \\ \frac{\partial W(x,0,\tau)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

выполнено с помощью метода конечных интегральных преобразований при улучшении сходимости рядов Фурье и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} W(x,y,\tau) &= t_c(\tau) + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{S(\mu_m,y,\tau)}{l} - \frac{(-1)^{m+1} Bi_1 t_c(\tau)}{\mu_m \sqrt{\mu_m^2 + Bi_1^2}} \right] \frac{\mu_m^2 + Bi_1^2}{\mu_m^2 + Bi_1^2 + Bi_1} \cos\left(\mu_m \frac{x}{l}\right), \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S(\mu_m,y,\tau) &= t_c(\tau) \varphi(\mu_m) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{P(\mu_m, \nu_n, \tau)}{L} - \frac{\varphi(\mu_m) (-1)^{n+1} Bi_2 t_c(\tau)}{\nu_n \sqrt{\nu_n^2 + Bi_2^2}} \right] \frac{(\nu_n^2 + Bi_2^2)}{\nu_n^2 + Bi_2^2 + Bi_2} \cos\left(\nu_n \frac{y}{L_0}\right); \\ \varphi(\mu_m) &= \frac{l \cdot \sin \mu_m}{\mu_m}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\mu_m, \nu_n, \tau) &= \\ = \int_0^{\tau} B(\mu_m, \nu_n, \omega) \exp(-A(\mu_m, \nu_n)(\tau - \omega)) d\omega + \\ + C(\mu_m, \nu_n) \exp(-A(\mu_m, \nu_n)\tau); \end{aligned}$$

$$A(\mu_m, \nu_n) = a \left[ \left( \frac{\mu_m}{l} \right)^2 + \left( \frac{\nu_n}{L} \right)^2 \right];$$

$$\begin{aligned} B(\mu_m, \nu_n, \tau) &= a t_c(\tau) \left( Bi_1 \frac{L_0}{l} \cos \mu_m \frac{\sin \nu_n}{\nu_n} + Bi_2 \frac{l}{L_0} \frac{\sin \mu_m}{\mu_m} \cos \nu_n \right) + \\ + \int_0^l \cos\left(\mu_m \frac{x}{l}\right) dx \int_0^{L_0} w(x,y,\tau) \cos\left(\nu_n \frac{y}{L_0}\right) dy; \\ C(\mu_m, \nu_n) &= \int_0^l \cos\left(\mu_m \frac{x}{l}\right) dx \int_0^{L_0} f(x,y) \cos\left(\nu_n \frac{y}{L_0}\right) dy; \end{aligned}$$

$Bi_1 = \alpha_1 l / \lambda$  – критерий Био;  $\mu_m > 0$  – корни характеристического уравнения  $ctg \mu = \mu / Bi_1$ .

На рисунке 4 представлены результаты расчетов, выполненных на основании решения (10) при значениях коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1=100$  Вт/(м<sup>2</sup>×°C),  $\alpha_0=50$  Вт/(м<sup>2</sup>×°C); размерах  $l=0,005$  м,  $L_0=0,01$  м; времени  $\tau=10$  с.

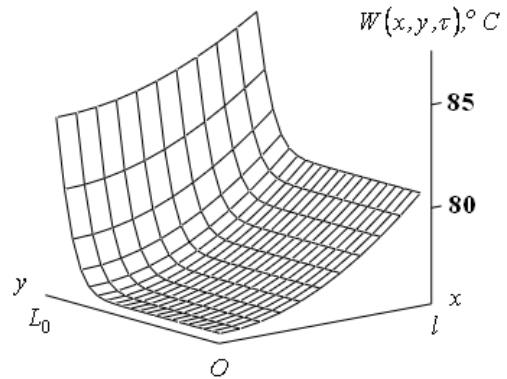


Рис. 4. Графическое представление результатов расчетов, выполненных на основании решения (10) уравнения (9)

Предложенная двухмерная модель теплопроводности в системе ткань-эластомер позволяет производить уточненные расчеты значений температуры в различных точках системы и прогнозировать качество изделия, подвергаемого термической вулканизации в аппаратах рассматриваемого типа.

### Литература

1. Гвоздев, В. Д. К вопросу о коэффициентах тепло- и температуропроводности ткани в системе ткань-эластомер / В. Д. Гвоздев, А. А. Аваев // Теоретические основы химической технологии – 1980. – Том XIV, № 1. – С. 127–128.

2. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – Москва : Высшая школа, 1967. – 600 с.

3. Аваев, А. А. Математическое моделирование нестационарной теплопроводности при вулканизации эластомерных покрытий на тканевых и металлических подложках : монография / А. А. Аваев. – Череповец : ГОУ ВПО ЧГУ, 2010. – 133 с.

4. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – Москва : Высшая школа, 1985. – 480 с.

*A.A. Avaev*

### REFINED MODEL OF THE PROCESS OF THERMAL VULCANIZATION OF ELASTOMERIC COATINGS ON A FABRIC BASIS

One-dimensional mathematical models of unsteady heat conduction do not always adequately describe complex technological processes. These processes include the vulcanization process of fabric-based elastomeric coatings. The fact is that in this case, various heat transfer conditions should be taken into account through mutually perpendicular planes of the object under study. This leads to the need to study a two-dimensional model of thermal conductivity. In this paper, we consider the case when heat transfer through such planes occurs according to Newton's law, but at different values of the heat transfer coefficient. In particular, a similar situation takes place in continuous curing fluidized bed apparatus with an inert grainy heat-transfer agent.

Mathematical model, non-stationary heat conduction, heat transfer, Newton's law, heat transfer coefficient, continuous apparatus, fluidized bed of an inert grainy heat-transfer agent.