УДК 004.9


К.С. Лукин, Н.В. Курилова
Вологодский государственный университет

ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОРГАНИЗАЦИИ БЕЗОПАСНОСТИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрены вопросы безопасности дорожного движения пешеходов и меры по снижению ДТП среди населения с точки зрения аналитики. Предложены варианты для алгоритмов и математических моделей по организации безопасности дорожного движения.

Безопасность, цепи Маркова, транспортные потоки.

В настоящее время организация безопасности дорожного движения является крайне сложной и важной задачей. Ввиду высокой аварийности на конкретных участках дорог и перекрестках появилась необходимость прогнозирования параметров дорожного движения. Современный анализ дорожной обстановки сводится к сбору данных и простейшему приведению формул по техническим средствам обеспечения безопасности дорожного движения. При этом существует ключевая проблема, а именно – отсутствие максимально приближенной к реальной ситуации математической модели.

Современные математические модели, используемые в организации дорожного движения, сводятся к статистическому сбору информации и обобщению усредненных значений, которые в дальнейшем используются в формулах. В данной работе сделана попытка максимально приблизить к действительным параметры математической модели, используя аналитический подход к решению задач организации дорожного движения. В первой части используются цепи Маркова в приложении к вероятностям расположения участников дорожного движения на проезжей части [1]. Во второй части, на основании общепринятой гидродинамической модели [2], сделаны попытки ликвидировать допущения, а также внести дополнительные параметры, способные учесть реальные ситуации на дороге (опережение одного транспортного средства другим при наличии свободного пространства, нарушение ПДД участниками движения, внезапно возникшие препятствия). В третьей части приведена проверка математической модели, с учетом постановки данных, как задачи с приближенно заданными параметрами [3]. Там же проверена рациональность текущей модели, сведения частного закона к общему для всего исследуемого участка проезжей части, адаптировано решение соответствующего интегрального уравнения и сделана попытка получения закона, сводящегося к численному решению и алгоритмизации.

Моделирование процессов, происходящих на участке проезжей части, крайне сложная, с аналитической точки зрения, задача. Применение теории цепей Маркова с использованием ячеечной модели изложено в [4].

Ячеечная модель актуальна при рассмотрении участников дорожного движения и их расположения на проезжей части как совокупности ячеек, перемещающихся в системе (на конкретном участке). Однако в данном случае возникает проблема нелинейности цепей Маркова ввиду необходимости моделирования положений самих ячеек, что, в свою очередь, требует составления каждый раз новой матрицы переходных вероятностей. Для дальнейших разработок алгоритмов математических расчетов параметров дорожного движения и выбора технических средств требуется максимально упрощенная система вероятностей и параметров изменений состояний.

Для преодоления данной трудности использован особый подход, в котором определяются все возможные положения и состояния всех участников движения. Благодаря ему получаем возможные состояния (положения) ячеек. Их состояния (положения) переходят из одной ячейки в другую. Таким образом, можно перейти к варианту рассмотрения виртуального перемещения ячеек и тем самым избавиться от нелинейности цепей Маркова.

Предположим, что участники дорожного движения перемещаются с интенсивностью $\varphi>0$, при этом длительности изменения положения независимы друг от друга, имеется в виду существование факта одинакового распределения с функцией F(x).

Пусть X_t – состояние системы в момент времени t, тогда получим

$$P\,(\tau_t = k) = \int_0^\infty (\varphi\varepsilon)^k\, k^{-1} exp[-\varphi\varepsilon]\, dF(\varepsilon), \qquad (1)$$

где τ_t – количество преобразований состояния ячеек, т.е. наличия или отсутствия в них частиц (объектов).

Таким образом, получаем цепь Маркова, выраженную стохастической последовательностью

$$\{X_0, X_1, \dots\}.$$

Естественным будет условие, что все процессы перехода будут обладать характерной дискретностью в пространстве и во времени. Логичным также будет утверждение, что частица (объект) может приниматься только одной из m-ячеек, т.е. находиться только в состоянии, которое ей соответствует.

Далее вводим понятие переходной вероятности

$$P\,\{X_n = m \mid X_{n-1} = x\} = p\,(x, m). \qquad (2)$$

Для каждого состояния переходная вероятность выражается рекуррентно по следующим формулам:

$p_0\,(x) = P\{X_0 = x\}$ – начальное состояние;

$$p_n(x) = P\,\{X_n = x\} = \sum_{m \in E} p_0(m)\, p_n(m, x),$$

где n – шаговые переходные вероятности.

Для примера, переходные вероятности первого и n-состояния будут выражены законами:

$$p_1(m, x) = p(m, x), \qquad (3)$$

$$p_n(m, x) = \sum_{m \in E} p(m, m_1)\, p_{n-1}(m_1, x).$$

Для дальнейшего выражения матрицы переходных вероятностей необходимо ввести несколько уточнений. Во-первых, множество E образует цепь Маркова, а его точки (значения) – состояния цепи Маркова. Во-вторых, ряд вероятностей, при переходе от 0 до n, будут иметь значения 0. Это обусловлено учетом конкретных параметров и положений ячейки на данном шаге. Итак, мы переходим к матрице переходных вероятностей. Она будет иметь вид

$$X = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1k-1} & m_{1k} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2k-1} & m_{2k} \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & m_{3k-1} & m_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{k-1k-1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{kk} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Следует отметить, что цепь Маркова имеет важные свойства. Одним из них и, пожалуй, решающим является наличие ненулевой вероятности попадания из одного состояния в другое. В свою очередь попадание может выражаться как в качестве непосредственного попадания, так и в качестве возвращения из одного состояния в другое.

Таким образом, мы сталкиваемся с необходимостью определения вероятностей попадания и возвращения в матрице переходных вероятностей хотя бы для первого попадания.

Возьмем случайные величины τ_x такие, что

$$\tau_x = inf\{n \geq 1: X_n = x\}, x \in E$$

соответственно, имеем вероятности:

$f_{x,x}^{(n)} = P\left(\{\tau_x = n\}\big/\{X_0 = x\}\right)$ – вероятность первого возвращения в состояние x на n-шаге;

$f_{x,m}^{(n)} = P\left(\{\tau_m = n\}\big/\{X_0 = x\}\right)$ – вероятность первого попадания в состояние m на n-шаге.

Таким образом, мы можем получить выражение для вероятности попадания, рано или поздно, в состояние m из состояния x:

$$f_{x,m} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x,m}^{(n)}. \qquad (5)$$

При вероятности равной единице можно классифицировать переходную матрицу как возвратную. Если же вероятность будет меньше единицы, то – как невозвратную.

Также следует определить и среднее время возвращения в состояние x из любого состояния m, если это возможно,

$$\mu_x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{x,x}^{(n)}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Подводя итог первой части работы, мы не можем не сделать одного простого, но крайне полезного замечания:

$$P_x\{X_n \in A\} = P_n(x, A),$$

что и является вероятностным смыслом переходных состояний системы за n-шагов.

Переходя ко второй части работы, а заодно и к реальному транспортному потоку, укажем, что для современности характерно использование гидродинамической модели, а именно уравнения неразрывности жидкости и кинетических уравнений жидкости. Выбор именно такой аналогии вполне обоснован: реальный транспортный поток представляет собой поток жидкости, двигающийся с определенными параметрами. Но, как в рассмотрении потока жидкости с позиции гидравлики, так и транспортного потока с учетом данной модели, приходится сталкиваться с рядом трудностей и допущений. Следует понимать, что отдельные участники дорожного движения (как и частицы жидкости) могут отходить от начально положенной схемы и параметров движения. Для устранения столь существенных упущений проведена попытка рассмотреть данные уравнения с позиции тензорного исчисления и получить дополнительные и крайне важные параметры [5].

Приведем уравнения, используемые в общепринятой практике, обозначающие гидродинамическую модель:

$$\partial_t f + \partial_x(fu) = \left(\frac{\partial t}{\partial f}\right)_{inf} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}, \qquad (7)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho V) = 0,$$

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_\varepsilon\big(\rho(x, t)\big).$$

Теперь можно перейти к рассмотрению данных уравнений с позиции тензорной алгебры. Как известно, тензор позволяет учесть не только собственные действия объекта, но и воздействия (в том числе ответные) на него внешних факторов или иных объектов. Это возможно благодаря основному свойству тензоров: линейно преобразовывать элементы одной системы (пространства) в линейные элементы другой системы.

В таком случае уравнение механики сплошных сред имеет вид

$$\rho\left(F - \frac{d\vartheta}{dt}\right) + div\,\Pi = 0, \qquad (8)$$

где П – тензор напряжений.

Тензор П имеет в декартовых координатах следующие составляющие:

$$P_{y_i y_i} = -p + 2\mu \frac{\partial \vartheta_{y_i}}{\partial y_i} + \lambda div\vartheta, \qquad (9)$$

$$P_{y_i y_k} = \mu \left(\frac{\partial \vartheta_{y_i}}{\partial y_i} + \frac{\partial \vartheta_{y_k}}{\partial y_k} \right),$$

где $\lambda,\ \mu -$ коэффициенты вязкости.

Следует сказать, что

$$div\vartheta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_2 H_3 \vartheta_{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_3 H_1 \vartheta_{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1 H_2 \vartheta_{x^3}}{\partial x^3} \right).$$

Далее нам необходимы компоненты, а именно вектор скорости и его компоненты, вектор ускорения и его компоненты и расхождение вектора.

$$\vartheta^i = \frac{\partial x^i}{\partial t},$$

$$w_{y^i} = \frac{\partial \vartheta_{y^i}}{\partial x} + \vartheta_{y^k} \frac{\partial \vartheta_{y^i}}{\partial y_k}.$$

Затем мы введем ковариантные составляющие в уравнение механики сплошной среды

$$\rho \left(\frac{\partial \vartheta^i}{\partial t} + \vartheta^2 \nabla_s \vartheta^i \right) = \rho F_k - \frac{\partial p}{\partial x^k} + \mu \nabla_i (\nabla_k \vartheta^i + \nabla^i \vartheta_k) \quad (10)$$

$$\nabla_k \vartheta^i = \frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^k} + \vartheta^\lambda \Gamma^i_{\lambda k}.$$

Далее воспользуемся формой смешанных составляющих тензора П и получим:

$$p^i_k = -\rho g^i_k + \mu (\Pi_k \vartheta^i + \nabla^i \vartheta_k) \qquad (11)$$

$$\nabla_k \vartheta^i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial x^k} - \frac{\vartheta_{x^k}}{H_i^2} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \delta^i_k \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\vartheta_{x^\lambda}}{H_\lambda} \frac{\partial ln H_i}{\partial x^\lambda}.$$

Затем мы можем найти физические составляющие вектора ускорения. Они будут иметь вид:

$$w_{x^i} = \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta_{x^k}}{H_k} \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta^2{}_{x^k}}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta_{x^k} \vartheta_{x^i}}{H_k H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k}.$$

Наконец, получим физический составляющий тензора П, без которого невозможно дальнейшее решение

$$\tau_{ik} = \mu \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial \vartheta_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k} \left[\vartheta_{x^i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} + \vartheta_{x^k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} \right] + 2\delta^i_k \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{\vartheta_{x^\lambda}}{H_\lambda} \frac{\partial ln H_i}{\partial x^\lambda} \right\}.$$

После соответствующих преобразований получим окончательный вид уравнения гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости для любой системы координат (криволинейных, ортогональных и т.д.)

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta_{x^k}}{H_k} \frac{\partial \vartheta_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta^2{}_{x^k}}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\vartheta_{x^k} \vartheta_{x^i}}{H_k H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k} \right\} = \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial x^i} +$$
$$+ \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_i}{H_k} \tau_{ik} \right) - \tau_{ik} \frac{\partial ln H_i}{\partial x^\lambda} \right\}.$$

Теперь уже мы можем получить уравнение неразрывности с учётом составляющих векторов и тензоров, используя, преимущественно, коэффициенты Ламэ

$$\frac{\partial (\vartheta_{x^1} H_2 H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial (\vartheta_{x^2} H_1 H_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial (\vartheta_{x^3} H_2 H_1)}{\partial x^3}.$$

Таким образом, с учётом элементов векторного анализа и тензорного исчисления мы смогли решить и дополнить существующую идею гидродинамических моделей транспортных потоков. В свою очередь, благодаря использованию составляющих векторов, мы смогли уйти от ряда существенных допущений и тем самым учесть возможные изменения параметров и законов движения отдельных субъектов дорожного движения в рассматриваемом транспортном потоке (участке проезжей части, перекрёстке). А использование контравариантных составляющих векторов кладет начало новым и более совершенным макроскопическим моделям транспортных потоков, так как берутся во внимание различные постановки системы координат.

Третья часть нашей работы. На данном этапе рассматривается приведение частного, приближенно взятого закона движения к общему закону для всего участка (перекрестка), отвечающему требованиям численного моделирования. Для решения поставленной задачи использованы элементы операционного исчисления и сведены решения поставленных уравнений (законов) к численным решениям интегральных уравнений.

Для дальнейшего решения необходимо отметить, что мы будем пользоваться теорией решения некорректных и обратных задач. Кстати говоря, именно обратную задачу мы перед собой и ставим: от частного (конкретного) закона мы идем к закону всего участка. Следует понимать, что преимущественная часть теории некорректных и обратных задач завязана на операционном исчислении как ходовом в специальных главах теории вероятностей и методов оптимизации.

Примем условие, что имеется задача, поставленная в приближенно заданных значениях. А это значит, что необходим один из самых уникальных и комплексных подходов – метод регуляризации Тихонова.

Возьмём за условие операционное уравнение первого рода:

$$A^0 z = u^0, z \in Z.$$

При этом будем иметь в виду, что в гильбертовом пространстве Z, U задают данное уравнение линейный ограниченный оператор и элемент, такие, что:

$$A^0 : Z \to U, \qquad u^0 \in Z.$$

Несложно заметить, что при $z^0 \in Z$, которое в свою бы очередь являлось единственным решением, мы бы легко свели задачу к следующему этапу. Однако необходимо понимать, что в операционном исчислении и методах регуляризации играют важную роль согласования операторов. В данном случае мы можем обнаружить проблему согласования параметра регуляризации с ошибками задания. Нам же необходимо свести все отклонения к точному решению z^0.

Запишем для наглядности известный всем функционал Тихонова, где α – параметр регуляризации (всегда больше нуля), при этом параметр является фиксированным:

$$M^{\alpha}(Z) = \|A^h z - u^{\delta}\|^2 + \alpha\|z\|^2, z \in Z. \quad (12)$$

Для этого воспользуемся не менее популярным и очень важным регуляризирующим алгоритмом – методом обобщённой невязки. Данный метод очень важен в методе регуляризации Тихонова, т.к. дает нам возможность учесть реальные параметры, а именно, что ошибка приближения не стремится к нулю и не является фиксированной величиной [6].

Ведя дальнейшие вычисления, определим следующие функции α:

$$\phi_{\eta}(\alpha) \equiv M^{\alpha}(z_{\eta}^{\alpha}) \equiv \|A^h z_{\eta}^{\alpha} - u^{\delta}\|^2 + \alpha\|z_{\eta}^{\alpha}\|^2,$$
$$\beta_{\eta}(\alpha) \equiv \|A^h z_{\eta}^{\alpha} - u^{\delta}\|^2, \gamma_{\eta} \equiv \|z_{\eta}^{\alpha}\|^2.$$

Определим меру несовместности уравнения:

$$\mu_{\eta}(u^{\delta}, A^h) \equiv \inf_{z\in Z}\|A^h z - u^{\delta}\|$$

Затем внесём предположение, что она вычисляется с согласованной погрешностью k, тогда выполняются неравенства:

$$\mu_{\eta}(u^{\delta}, A^h) \le {\mu^k}_{\eta}(u^{\delta}, A^h) \le \mu_{\eta}(u^{\delta}, A^h) + k,$$
$$k(\eta) = h + \delta.$$

Далее используем интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Сразу требуется внести уточнение, что используется метод регуляризации Тихонова и обобщенной невязки.

$$A^0[z](x) = \int_a^b K^0(x,s)z(s)ds = u^0(x), c \le x \le d$$

В нашем случае вместо конкретного уравнения мы имеем его приближение:

$$A^h[z](x) = \int_a^b K^h(x,s)z(s)ds = u^{\delta}(x), c \le x \le d.$$

Для дальнейшего решения нам необходимо привести следующие оценки:

$$\|u^{\delta} - u^0\| \le \delta, \|K^h - K^0\|_{L_2(\Pi)} \le h,$$
$$\|A^h - A^0\| \le h.$$

Запишем очевидную оценку для дальнейшего решения интегрального уравнения, которая в свою очередь служит в качестве оценки для разности норм операторов:

$$\|A^h - A^0\|^2 = \sup_{\|z\|\le 1}\|(A^h - A^0)z\|^2$$
$$= \sup_{\|z\|\le 1}\int_c^d\left(\int_a^b\left(K^h(x,s) - K^0(x,s)\right)z(s)ds\right)^2 dx$$
$$\le \sup_{\|z\|\le 1}\int_c^d\left(\left(\int_a^b\left(K^h(x,s) - K^0(x,s)\right)\right)^2 dsdx\int_a^b z^2(s)ds\right)^1$$
$$\le \int_c^d\int_a^b\left(K^h(x,s) - K^0(x,s)\right)^2 dsdx \le h^2.$$

Задача минимизации для выбранного операторного уравнения имеет вид

$$\Phi_{\eta}(z) = \int_c^d\left(\int_a^b K^h(x,s)z(s)ds - u^{\delta}(x)\right)^2 dx \to min. \quad (13)$$

Для дальнейшего приведения к удобному для численного решения виду, получим дискретный конечно-разностный аналог вышеуказанного функционала, то есть:

$$\Phi_{\eta}(z) \equiv \sum_{\iota=1}^{m}\left[\widehat{\sum_{\jmath=1}^{n} K_{\iota,\jmath}^h z_{\jmath} h_{\jmath}} - u_{\iota}^{\delta}\right]^2 h_x.$$

Для нахождения конечного, удобного для нас, выражения, в качестве исходного множества возьмем компакт, и тем самым за дискретный конечно-разностный аналог мы можем принять множество:

$$M \downarrow_C \equiv \left\{z: z \in R^n \quad \begin{matrix} z_{\iota-1} - 2\widehat{z_{\iota} + 2}z_{\iota+1} \le 0 & \iota = 2, \dots, n-1 \\ z_{\iota+1} - z_{\iota} \le 0 & \iota = 1, \dots, n-1 \\ 0 \le z_{\iota} \le C & \iota = 1, \dots, n \end{matrix}\right\}.$$

Таким образом, нами получено конечное множество в единой цепи преобразований для получения численных значений параметров дорожного движения. В работе были представлены вероятностные расчёты и переходные вероятности положения (состояния) участников дорожного движения для любого исследуемого участка (перекрестка). Также была усовершенствована и адаптирована для задач организации безопасности дорожного движения и принятая для моделирования транспортных потоков гидродинамическая модель. В конечном итоге была сделана попытка свести интегральное уравнение для обобщения закона для исследуемого участка с учетом наклонности на численное моделирование и исчисление. Следует заметить, что уникальность работы состоит в постановке задачи интегрального уравнения Фредгольма первого рода как задачи операционного исчисления с учетом неточно и приближенно заданной информацией. С позиции некорректных и обратных задач была проведена регуляризация методом Тихонова и методом обобщенной невязки. Опять же, необходимо указать, что были сделаны уточнения насчет наличия ошибки согласования, которая в свою очередь не стремится к нулю, а это уже позволяет нам учитывать реальные параметры дорожной обстановки.

Данная работа – фундаментальное начало для алгоритмов и математических моделей по организации безопасности дорожного движения. Текущие модели, множества и функционалы можно расширить и адаптировать для различных частных (конкретных) ситуаций и параметров дорожной обстановки. Дальнейшее развитие данной тематики будет направлено на построение единого алгоритма для получения численных параметров дорожного движения.

Литература

1. Зорин, А. В. Введение в общие цепи Маркова : учебно-методическое пособие / А. В. Зорин. – Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2013. – 51 с.
2. Хейт, Ф. Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейт. – Москва, 1966. – 286 с.

3. Сумин, М. И. Современные устойчивые математические технологии решения задач с приближенно заданной информацией : учебно-методический материал / М. И. Сумин; Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2017. – 120 с.
4. Калашников, В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций / В. В. Калашников. – Москва : Наука, 1978. – 248 с.
5. Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – Москва : Наука, 1965. – 420 с.
6. Боровков, А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов / А. А. Боровков. – Москва : Эдиториал УРСС, 1999. – 440 с.

K.S. Lukin, N.V. Kurilova

INFORMATION AND ANALYTICAL APPROACHES TO SOLVE PROBLEMS OF ROAD SAFETY ORGANIZATION

The issues of pedestrian traffic safety and measures to reduce accidents among the population from the point of view of analytics are considered. Options for algorithms and mathematical models for the organization of road safety are proposed.

Safety, Markov chains, traffic flows.