



ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 2

Цель исследования состоит в разработке компактных методов расчета механических систем с несколькими степенями свободы для установившихся режимов. Представление гармонических величин в виде вращающихся векторов в комплексной плоскости и операции с их комплексными амплитудами позволяют многократно облегчить расчет сколь угодно сложных механических систем при гармонических воздействиях в установившемся режиме.

Реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс.

Расчет динамики механической системы [1] с n степенями свободы [2], включающей инертные [3] и упругие элементы [4], предполагает составление и интегрирование системы из n дифференциальных уравнений второго порядка [5], которые сводятся к дифференциальному уравнению $2n$ порядка. Увеличение степени свободы на единицу увеличивает порядок результирующего дифференциального уравнения на два. Решение дифференциальных уравнений высоких порядков является достаточно громоздким и трудоемким [6].

Цель исследования состоит в разработке компактных методов расчета механических систем с несколькими степенями свободы для установившихся режимов.

Далее используются следующие обозначения и терминология:

- $\underline{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t$ – инертный реактанс [7] в комплексном представлении;
- $\underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{k}{\omega}$ – упругий реактанс;
- $\underline{r} = r$ – механический резистанс;
- $\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический импеданс;
- $\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{1}{\omega m} = \frac{1}{\underline{x}_m}$ – инертный сассептанс;
- $\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}$ – упругий сассептанс;
- $\underline{g} = g = \frac{1}{r}$ – механический кондактанс;
- $\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ – механический адмитанс.

Сила, скорость, импеданс и адмитанс связаны формулами

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = ZV e^{i\varphi}, \quad (1)$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (2)$$

Несколько релевантных теорем. Соотношение между \underline{y} и \underline{z} устанавливает

Теорема 1. Для механической системы справедлива формула $\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}$.

Доказательство. В соответствии с (1)

$$\underline{z} = \frac{\dot{F}}{\dot{V}}$$

В соответствии с (2) $\underline{y} = \frac{\dot{V}}{\dot{F}} = \frac{1}{\underline{z}}$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Для механической системы без демфера справедлива формула $\underline{b} = 1/\underline{x}$, поскольку в этом случае $\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{z} = \underline{x}$.

Теорема 2. Эквивалентные величины для механической системы определяются формулами:

$$g^* = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad \underline{b}^* = \frac{x}{r^2 + x^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad r^* = \frac{g}{g^2 + b^2},$$

$$\underline{x}^* = \frac{b}{g^2 + b^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Доказательство. $\underline{z} = r + \underline{x} = r + ix$,

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r + ix} \frac{r - ix}{r - ix} = \frac{r - ix}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - i \frac{x}{r^2 + x^2} = g^* + \underline{b}^*,$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + ib,$$

$$\underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} = \frac{1}{g + ib} \frac{g - ib}{g - ib} = \frac{g - ib}{g^2 + b^2} = \frac{g}{g^2 + b^2} - i \frac{b}{g^2 + b^2} = r^* + \underline{x}^*.$$

Теорема доказана.

Пусть n объектов с механическими адмитансами $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ соединены последовательно. Эквивалентный адмитанс системы – \underline{y} . Имеет место

Теорема 3. При последовательном соединении объектов справедлива формула $\underline{y} = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j$.

Доказательство. При последовательном соединении к объектам приложена единая сила \dot{F} . Для произвольного объекта в соответствии с (2) справедлива формула $\dot{V}_j = \underline{y}_j \dot{F}$.

Согласно принципу суперпозиции скорость штока источника силового гармонического воздействия равна $\dot{V} = \sum_{j=1}^n \dot{V}_j = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \dot{F} = \dot{F} \sum_{j=1}^n \underline{y}_j = \dot{F} \underline{y}$.

Теорема доказана.

Следствие 3.1.
$$\frac{1}{\underline{z}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{z}_j}$$

Следствие 3.2.
$$\underline{z} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \underline{z}_j}$$

Следствие 3.3. Эквивалентный механический импеданс меньше каждого из составляющих механических импедансов.

Следствие 3.4.

При $\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \dots = \underline{z}_j = \dots = \underline{z}_n = \underline{z}^*$ $\underline{z} = \frac{\underline{z}^*}{n}$.

Следствие 3.5.
$$\lim_{\underline{z}_1 \rightarrow \infty} \underline{z} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{j=2, j \neq k}^n \underline{z}_j}$$

Пусть n объектов с механическими импедансами $\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n$ соединены параллельно. Эквивалентный импеданс системы – \underline{z} . Имеет место

Теорема 4. При параллельном соединении объектов справедлива формула $\underline{z} = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j$.

Доказательство. При параллельном соединении объекты обладают единой скоростью \dot{V} . Для произвольного объекта в соответствии с (1) справедлива формула $\dot{F}_j = \underline{z}_j \dot{V}$.

Согласно принципу суперпозиции сила, приложенная к системе, равна

$$\dot{F} = \sum_{j=1}^n \dot{F}_j = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j \dot{V} = \dot{V} \sum_{j=1}^n \underline{z}_j = \dot{V} \underline{z}$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1.
$$\frac{1}{\underline{y}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{y}_j}$$

Следствие 4.2.
$$\underline{y} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \underline{y}_j}$$

Следствие 4.3. Эквивалентный механический адмитанс меньше каждого из составляющих механических адмитансов.

Следствие 4.4.

При $\underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_j = \dots = \underline{y}_n = \underline{y}^*$ $\underline{y} = \frac{\underline{y}^*}{n}$.

Следствие 4.5.
$$\lim_{\underline{y}_1 \rightarrow \infty} \underline{y} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{j=2, j \neq k}^n \underline{y}_j}$$

Параллельно-последовательное соединение потребителей механической мощности. Схема соединения показана на рисунке 1.

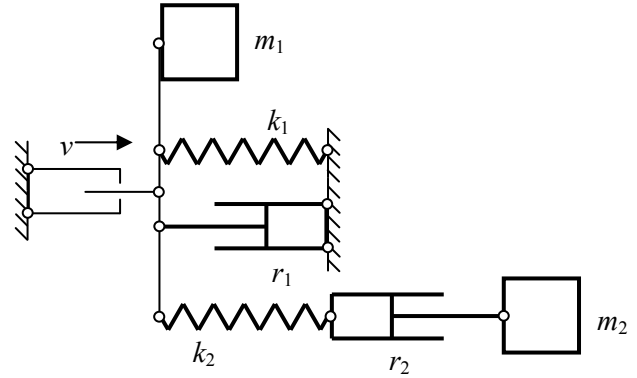


Рис. 1. Параллельно-последовательное соединение

В соответствии с теоремой 1 $\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2$. В соответствии с теоремой 4 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$. В соответствии с (1) $\dot{V} = \dot{F}/\underline{z}$.

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{j0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ (кг · с⁻²), $r = 7$ (кг · с⁻¹). Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2 = 1/(15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ}) \approx 6,607e^{-i19,29^\circ}$ (кг · с⁻¹),
 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 12,207e^{i55^\circ} + 6,607e^{-i19,29^\circ} = 15,372e^{i30,57^\circ}$ (кг · с⁻¹)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{F}/\underline{z} = 100/(15,372e^{i30,57^\circ}) = 6,505e^{-i30,57^\circ} \text{ (м · с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{F}_{m1} &= \underline{z}_{m1} \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = 130,1e^{i59,43^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{k1} &= \underline{z}_{k1} \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = 65,05e^{-i120,57^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{r1} &= r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = 45,535e^{-i30,57^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_2 &= \underline{z}_2 \dot{V} = 6,607e^{-i19,29^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = 42,979e^{-i49,86^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{V}_{m2} &= \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 42,979e^{-i49,86^\circ} = 2,149e^{-i139,86^\circ} \text{ (м · с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V}_{k2} &= \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 42,979e^{-i49,86^\circ} = 4,298e^{i40,14^\circ} \text{ (м · с}^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 42,979 e^{-i49,86^\circ} = 6,14 e^{-i49,86^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Классический расчет предполагает составление и решение системы дифференциальных уравнений [8] и поэтому несоизмеримо сложнее и объемнее по сравнению с примером 1.

Векторная диаграмма для величин из примера 1 представлена на рисунке 2.

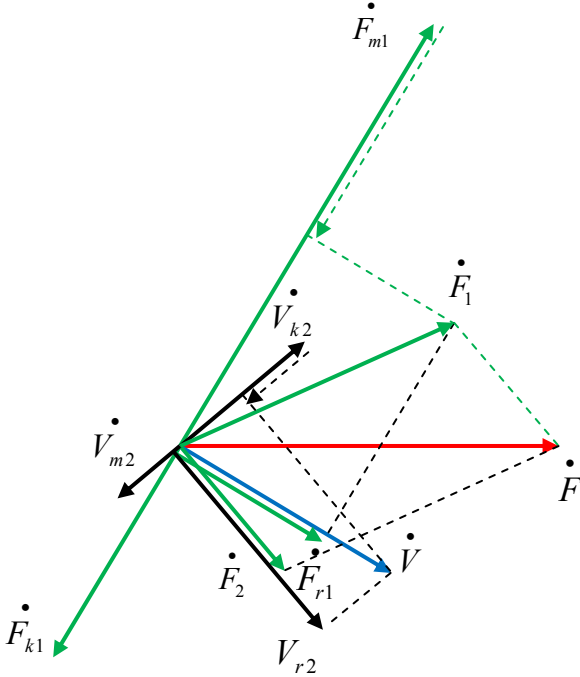


Рис. 2. Векторная диаграмма при параллельно-последовательном соединении

Двойной (параллельно-последовательный) резонанс. В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей [9] можно ограничиться численным примером.

Пример 2. $k = 40 (\text{кг} \cdot \text{с}^{-2})$. Остальные данные – из примера 1. Найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = r = 7 e^{i0^\circ} (\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2r = 14 e^{i0^\circ} (\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V} = \dot{F} / \underline{z} = 100 / (14 e^{i0^\circ}) = 7,143 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{F}_{m1} = \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20 e^{i90^\circ} \cdot 7,143 e^{i0^\circ} = 142,857 e^{i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_{k1} = \underline{x}_{k1} \dot{V} = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 7,143 e^{i0^\circ} = 142,857 e^{-i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_{r1} = \dot{F}_1 = r_1 \dot{V} = 7 e^{i0^\circ} \cdot 7,143 e^{i0^\circ} = 50 e^{i0^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_2 = \underline{z}_2 \dot{V} = 7 e^{i0^\circ} \cdot 7,143 e^{i0^\circ} = 50 e^{i0^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{V}_{m2} = \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 50 e^{i0^\circ} = 2,5 e^{-i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_{k2} = \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 50 e^{i0^\circ} = 2,5 e^{i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_{r2} = g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 50 e^{i0^\circ} = 7,143 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рисунке 3.

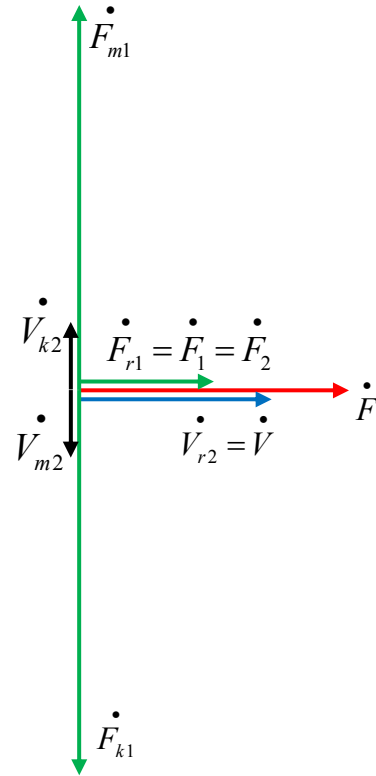


Рис. 3. Векторная диаграмма при двойном резонансе

Последовательно-параллельное соединение потребителей механической мощности. Схема соединения показана на рисунке 4.

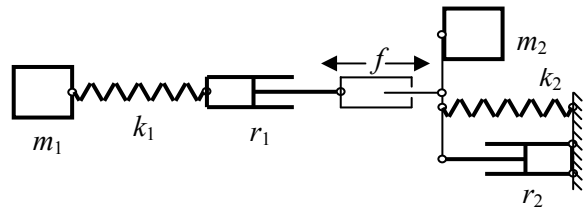


Рис. 4. Последовательно-параллельное соединение

В соответствии с теоремой 1 $\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2$. В соответствии с теоремой 3 $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$. В соответствии с (2)

скорость штока $\dot{V} = \underline{y} \dot{F}$.

Пример 3. Для данных примера 1 найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = 1/(12,207 e^{i55^\circ}) = 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} (\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}),$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} + 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} (\text{кг}^{-1} \cdot \text{с}),$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{F} y = 100 \cdot 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}), \\ \dot{V}_2 &= \dot{F} y_2 = 100 \cdot 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 8,192 e^{-i55^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}). \\ -\dot{V}_1 + \dot{V}_2 &= 15,135 e^{i19,29^\circ} + 8,192 e^{-i55^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V}.\end{aligned}$$

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рисунке 5.

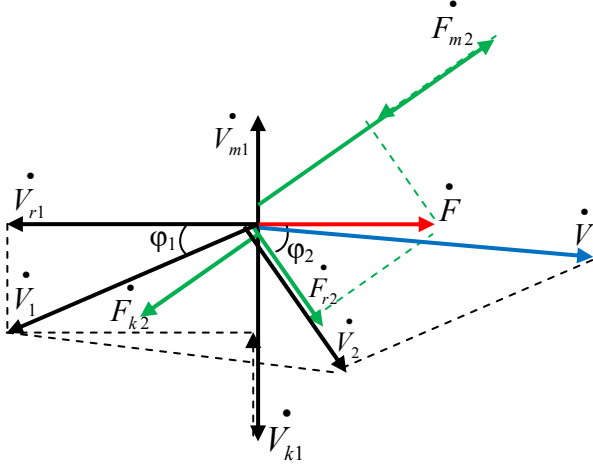


Рис. 5. Последовательно-параллельное соединение

Двойной (последовательно-параллельный) резонанс. В дополнение к вышесказанному о резонансах сил и скоростей можно ограничиться численным примером.

Пример 4. Для данных примера 2 найти все силы и скорости в установившемся режиме.

$$\begin{aligned}\underline{y}_1 = 1/\underline{z}_1 = g_1 = \underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = g_2 &= 1/(12,207 e^{i55^\circ}) = \\ &= 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} (\text{к}\Omega^{-1} \cdot \text{с}), \\ \underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 &= 2 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} (\text{к}\Omega^{-1} \cdot \text{с}),\end{aligned}$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 28,571 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V} = -\dot{V}_1 + \dot{V}_2,$$

$$-\dot{V}_1 = -\dot{F} \underline{y}_1 = \dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} =$$

$$= 14,286 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1})$$

$$-\dot{V}_{m1} = \underline{b}_{m1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{-i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$-\dot{V}_{k1} = \underline{b}_{k1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 5 e^{i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$-\dot{V}_{r1} = -g_1 \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 e^{i0^\circ} = 14,286 e^{i0^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{F}_{m2} = \underline{x}_{m2} \dot{V}_2 = 20 e^{i90^\circ} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = 285,714 e^{i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_{k2} = \underline{x}_{k2} \dot{V}_2 = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = 285,714 e^{-i90^\circ} (\text{Н}),$$

$$\dot{F}_{r2} = \dot{F}_2 = \dot{F} = r_2 \dot{V}_2 = 7 e^{i0^\circ} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = 100 e^{i0^\circ} (\text{Н}).$$

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рисунке 6.

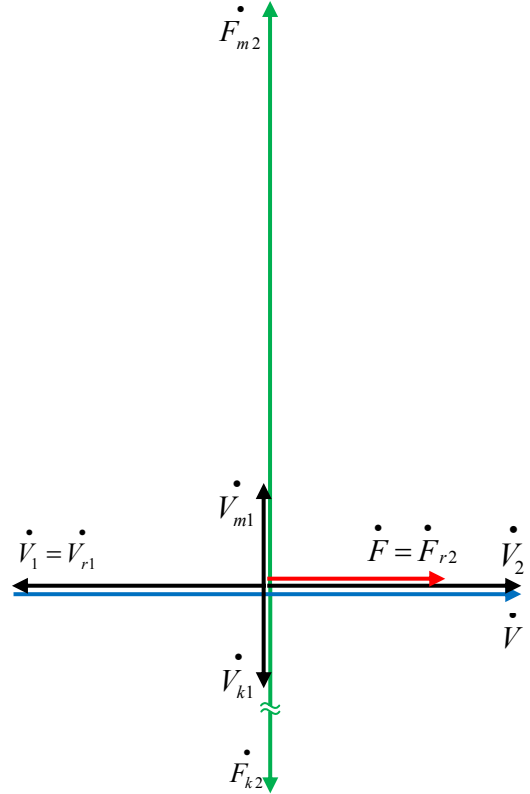


Рис. 6. Векторная диаграмма при двойном (последовательно-параллельном) резонансе

О характере механического импеданса. Пусть

$$\dot{F} = F e^{i0},$$

$$\underline{z} = r + \underline{x}_m = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = z e^{i\varphi}.$$

Тогда
$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F e^{i0}}{z e^{i\varphi}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi}.$$

Пример 5. Для данных предыдущих примеров

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = \sqrt{7^2 + 20^2} e^{i \arctg \frac{20}{7}} \approx 21,19 e^{i70,71^\circ} (\text{к}\Omega \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{21,19 e^{i70,71^\circ}} \approx 4,719 e^{-i70,71^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Векторная диаграмма для величин из примера 5 представлена на рисунке 7.

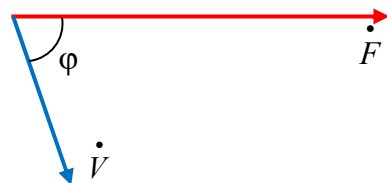


Рис. 7. Инертный характер

Пусть $\underline{z} = r + \underline{x}_k = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = z e^{i\varphi}$.

Пример 6. Для данных предыдущих примеров

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = \sqrt{7^2 + 10^2} e^{i \arctg \frac{10}{7}} \approx$$

$$12,207 e^{-i55^\circ} \text{ (кз} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12,207 e^{-i55^\circ}} \approx 8,192 e^{i55^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

Векторная диаграмма для величин из примера 6 представлена на рисунке 8.

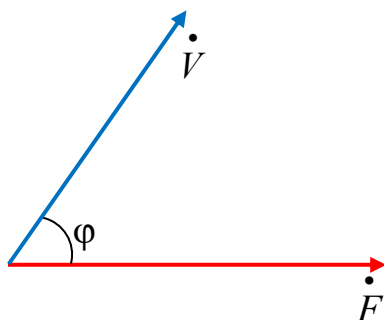


Рис. 8. Упругий характер

Представленные выше рассуждения можно принять в качестве иллюстрации справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. При инертном характере нагрузки скорость отстает по фазе от приложенной силы. При упругом – опережает. При резистивном – совпадает.

Замечание 5.1. Если $\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k$ и $\underline{x}_m > \underline{x}_k$, то нагрузка имеет инертный характер. Если $\underline{x}_m < \underline{x}_k$, то упругий [10].

Схемное изменение характера нагрузки. Пусть нагрузка состоит из инертного тела и упругого элемента. Пусть $\sqrt{k/m} \neq \omega$. Для этих условий имеет место

Теорема 6. При изменении схемы соединения инертного тела и упругого элемента с параллельного на последовательное или наоборот характер нагрузки меняется.

Доказательство. Пусть $\underline{x}_m > \underline{x}_k$. При параллельном соединении

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}$$

и в соответствии с замечанием 5.1 нагрузка имеет инертный характер. Фаза $i\pi/2 > 0$.

При изменении схемы соединения на последовательное

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega m - k/\omega}{km} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

В соответствии со следствием теоремы 1

$$\underline{x} = \frac{1}{\underline{b}} = \frac{km}{\omega m - k/\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Фаза $-i\pi/2 < 0$, т.е. нагрузка приобрела упругий характер.

Аналогичным образом рассматривается условие

$$\underline{x}_m < \underline{x}_k.$$

Теорема доказана.

Применение комплексного представления позволило получить существенно более компактные алгебраические методы расчета механических систем с несколькими степенями свободы в установившихся режимах по сравнению с классическими методами, основанными на составлении и интегрировании дифференциальных уравнений высоких порядков. При этом объем вычислений сокращается в несколько раз. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактанс, резистанс и импеданс для параллельного соединения потребителей механической мощности и сасептанс, кондактанс и адмитанс – для последовательного. Построение векторных диаграмм амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени дает наглядное представление о фазовых соотношениях между этими величинами и их взаимосвязи.

Литература

1. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – 4-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Анализ нелинейной динамики процесса многорезцового точения «по следу» / А. М. Гуськов, М. А. Гуськов, Динь Дык Тунг, Г. Я. Пановко // Машиностроение. – 2018. – № 2 (55). – С. 9–16.
3. Царенко, С. Н. Крутильные колебания стержневых конструкций с осевой неоднородностью геометрических характеристик / С. Н. Царенко – DOI: 10.14529/mmph190107 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Т. 11, № 1. – С. 50–58.
4. Буланчук, П. О. Вибрационная энергия и управление маятниковыми системами / П. О. Буланчук, А. Г. Петров // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, Вып. 4. – С. 550–562.
5. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2 (4). – С. 15–18.
6. Попов, И. П. Синтез инертно-инертного осциллятора / И. П. Попов // Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 1. – С. 7–13.
7. Нейтрализация механического инертного реактанта основной гармоники в двигателях внутреннего сгорания / И. П. Попов, Д. П. Попов, С. Ю. Кубарева, Е. Ю. Блынских // Проблемы и перспективы развития автомобильного транспорта : материалы международной научно-практической конференции. – Курган : КГУ, 2013. – С. 82–87.
8. Попов, И. П. Вращательные инертно-емкостные устройства / И. П. Попов // Вестник Самарского государственного технического университета. Технические науки. – 2011. – № 3 (31). – С. 191–196.

9. Попов, И. П. Антирезонанс – резонанс скоростей / И. П. Попов. – <https://doi.org/10.17587/mau.20.362-366> // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 6. – С. 362–366.

10. Попов, И. П. Механические аналоги реактивной мощности / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3 (30). – С. 37–39.

I.P. Popov

STUDY OF FORCED OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS. PART 2

The purpose of the study is to develop essentially compact methods for calculating mechanical systems with several degrees of freedom for steady states. Representation of harmonic quantities in the form of rotating vectors in the complex plane and operations with their complex amplitudes can greatly facilitate the calculation of arbitrarily complex mechanical systems under harmonic effects in the steady state.

Reactance, resistance, impedance, susceptance, conductance, admittance.