УДК 691.115


Ю.Р. Осипов, К.С. Лукин
Вологодский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ СМЕШИВАНИЯ ДРЕВЕСНЫХ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной статье представлена математическая модель исследования процессов смешивания древесных сыпучих материалов в агрегатах сушки-измельчения при изготовлении строительных материалов. Кинетика рассматривалась с позиции теории цепей Маркова в представлении ячеечной модели. Также адаптированы уравнения теплопроводности и законы диффузии в процессе смешивания. Для решения параметров процессов смешивания использована идея Леви-Чивита, приведены законы для расчета базовых операторов, которые объясняют фундаментальные процессы, а также способствуют дальнейшему совершенствованию систем изготовления строительных материалов.

Цепи Маркова, сушка, измельчение, древесные сыпучие материалы, идея Леви-Чивита, ячеечные представления, виртуальное перемещение ячеек.

Разобраться в том, что происходит в древесном материале в процессе тепловой обработки, исследователю помогает теория тепломассопереноса. Благодаря работам А.В. Лыкова, учеников и исследователей его школы [1–2] эта теория, базирующаяся на фундаментальных законах математической физики, испытала бурное развитие в 70-х годах прошлого столетия. К сожалению, труды А.В. Лыкова – в настоящее время редкость. Большинство современных исследователей предпочитают способы решения задачи компьютерными (численными) методами. Первая научно обоснованная монография по смесителям, которая фактически положила начало использованию математического аппарата случайных марковских процессов при моделировании процессов смешивания, была написана профессором Ю.И. Макаровым [3]. Данный подход успешно развивается и используется как для периодических, так и для непрерывных процессов смешивания [4].

В современной деревообрабатывающей промышленности огромное значение имеет рациональное использование отходов производства. Крайне популярным в последнее время становится изготовление древесных строительных материалов из отходов процессов деревообработки (сухостоя, опилок, стружки, некондиционной древесины). Данная мера экономически крайне выгодна. Однако для получения качественных строительных материалов необходимо грамотно соблюсти технологию производства, в частности процесс измельчения и сушки отходов. Данный этап является наиболее важным, так как в нем формируется состав будущих материалов и, как следствие, его свойства. Для сокращения затрат на производства созданы агрегаты, объединяющие процессы измельчения и сушки в единый технологический процесс. Данная мера обеспечила сокращение затрат на производство, однако поставила ряд вопросов, связанных с моделированием процессов переноса и расчета эффективных параметров технологических процессов для получения качественного строительного материала.

Моделирование процессов переноса в данной технологической установке крайне сложная и многогранная задача. Однако существует ряд вопросов, поддающихся математическому моделированию. В данной работе представлена модель процессов переноса древесных отходов, находящихся в агрегате измельчения и сушки, в виде сыпучей смеси. Математическая модель основана на ячеечном представлении, для которого справедливо использование теории цепей Маркова.

Марковские цепи в применении ячеечной модели объективны в первую очередь для процессов, в которых задействованы сыпучие смеси, подверженные сегрегации. К подобного рода процессам можно отнести процесс получения из отходов, прошедших первичные этапы обработки, смеси с набором необходимых свойств (влажности, степени измельчённости). Данный технологический этап происходит в динамическом классификаторе агрегата измельчения-сушки. Динамический классификатор пропускает мелкое и сухое сырье, а крупные и влажные частицы сырья возвращает к ротору агрегата, этот процесс повторяется до получения необходимой влажности и степени измельчения сырья.

Ячеечная модель в данном случае имеет ряд трудностей, которые создают нелинейность марковских цепей и, как следствие, вынуждают ограничить применение модели ввиду необходимости создания каждый раз новой матрицы переходных вероятностей. В связи с этим можно применить метод виртуального перемещения ячеек, то есть перемещать не ячейки, а полностью материал из одной ячейки в другую. Данное допущение позволяет также пренебречь нелинейностью марковских цепей.

Предположим, что ячейки перемещаются в системе с интенсивностью $\lambda>0$, так что длительности изменения состояния (положения) ячеек независимы друг от друга, то есть одинаково распределены с функцией распределения $B(\chi)$ [5]. При этом, наблюдая состояние ячейки, то есть наличие в ней частицы и ее переходное состояние, в момент времени t= 1, 2, 3 … можно сделать вывод, что X_t – состояние системы в момент времени t. Если предположить, что X_t=0, то можно получить соотношение:

$$X_{t=1} = \max\{0, X_t + M_{t+1} - 1\}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots ,$$

где случайные величины M_1, M_2, … – независимы и распределены, причём

$$P\{M_t = k\} = \int_0^{\infty} (\lambda\epsilon)^k * (k)^{-1} * exp[-\lambda\epsilon] * dB(\epsilon).$$

Число M_t – количество преобразований состояния ячейки (наличия и/или изменения в ней положения частицы) за t момент времени. Таким образом, цепь Маркова образуется следующей стохастической последовательностью:

$$\{X_0, X_1, \dots\}.$$

Данное выражение справедливо при условии, что речь идет о марковских процессах дискретных в пространстве и во времени. Данный вид цепей является наиболее простым для моделирования. А также мы можем принять допущение, что частица может принадлежать только к одной из m ячеек, то есть находиться в текущий момент времени только в ней. В соответствии с поставленными условиями и допущениями, мы можем получить матрицу переходов в следующем виде:

$$X = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1k-1} & m_{1k} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2k-1} & m_{2k} \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & m_{3k-1} & m_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{k-1k-1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{kk} \end{bmatrix}.$$

Представленная ячеечная модель, как известно, классифицируется как цепь Маркова, однородная и нелинейная. В связи с этим адекватным будет использование следующей формулы:

$$P_{ij}(k) = P_0 \times [1 - C_j \times (k-1)],$$

где P_{ij} (k) – вероятность перехода частиц ключевого компонента из ячейки i в ячейку j на переходе k; P_0 – вероятность перехода частиц ключевого компонента из ячейки i в ячейку j при нулевой концентрации ключевого компонента в ячейке j; C_j (k −1) – концентрация ключевого компонента в ячейке j на переходе k −1.

Использование вышеприведенных инструментов моделирования процессов интенсификации при изготовлении древесных строительных материалов также будет полезно при решении уравнений теплопроводности вида [6]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \times \Delta T(M,t) + \vartheta_0 \times \nabla T\,(M,t) + \\ +[\omega \times r] \times \nabla T(M,t)\,.$$

В нашем случае справедливо будет применение вращательного движения системы координат с угловой скоростью ω, если $\vartheta_\varphi \times e_\varphi = \omega \times r \times e_\varphi$ – линейная скорость вращательного движения в направлении окружности. При этом $\left(\frac{1}{r}\right) \times \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) \times e_\varphi$ – grad температуры в данном направлении. С учетом $T = T(r, \varphi, t)$, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \times \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right) + \omega \times \frac{\partial T}{\partial \varphi}.$$

При исследовании кинетики смешивания сыпучих древесных материалов в процессе изготовления древесных строительных материалов целесообразно будет применение моделей, связанных как со смешением в целом сыпучих материалов, так и с расчётом эффективных параметров агрегатов прессования, сушки и т.д.

В этой связи большим достижением стало использование в теории смешивания сыпучих материалов диффузионной модели. В данном случае мы можем воспользоваться дифференциальными уравнениями Фоккера-Планка [3]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(c(x,r) \times u(x)\big) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(D_L(x) \times c(x,r)\big) + \frac{D_r}{r} \times \frac{\partial}{\partial r}\left(r \times \frac{\partial(x,r)}{\partial r}\right),$$

где, u(x) – средняя скорость конвекции материала в смесителе, r, x – координаты, D – экспериментальные коэффициенты поперечной и продольной диффузии.

С учётом использования в работе цепей Маркова, можно использовать диффузионное уравнение Колмогорова [7]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 (Df)}{\partial x^2} - \frac{\partial (Vf)}{\partial x},$$

где, f (x,t) – функция плотности вероятности по отношению к процессам перехода частиц ключевого компонента за момент времени, D – диффузионный коэффициент, V – скорость сноса.

Решение приведенных выше уравнений позволяет дать дальнейший ход расчёту эффективных параметров, более совершенных деревоизготовительных установок. В частности, будет полезно при применении идеи Леви-Чивита о параллельном переносе векторов [8]. Из определения следует, что вектор A^i в точке M и ему контравариантный вектор $A^{`i}$ в бесконечно-близкой точке риманова пространства можно считать равными векторами. Таким образом, можно вычислить составляющие этих векторов:

$$a'_\alpha - a_\alpha = \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\right)' \times A'^i - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \times A^i.$$

Следует заметить, что штрих указывает на рассмотрение величины в контексте точки M`. Но далее следует ввести допущение:

$$\delta A^i = A'^i - A^i\,.$$

А также, следует заметить, что

$$\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\right)' = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial y^i \partial x^k} \times dx^k\,.$$

В таком случае можно ограничиться бесконечно-малыми величинами первого порядка, тогда с учётом уравнения составляющих вектора можем получить:

$$(a_\alpha' - a_\alpha)^2 = \sum_{a=1}^{m} (\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \times \delta A^i + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial y^i \partial x^k} \times dx^k)^2 \ .$$

Таким образом, при параллельном переносе вектора A^i его составляющие получают некоторые приращения δA^i. Они же, в свою очередь, определяются следующим образом:

$$\delta A^i \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \times \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^\kappa} + A^i \times$$
$$\times dx^k \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} \times \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial y^i \partial x^k} \times dx^k = 0.$$

Далее справедливо будет указать, что использованные в римановом пространстве геометрические понятия будут применимы для определения таких важных параметров, как дивергенция векторного поля, а за ней, как следствие, составляющие вихря вектора, моделирующего движение частиц и ячеек в их виртуальном представлении.

Для дальнейших расчётов нам необходимо ввести обозначения H_i – коэффициенты Ламэ:

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial x^i}\right)^2 .$$

При этом справедливо будет введение следующих допущений:

$$\begin{cases} g_{ii} = H_i^2 \\ g = H_1^2 \times H_2^2 \times H_3^2 \\ g^{ii} = \dfrac{1}{H_i^2} \\ g_{ik} = g^{ik} = 0 \quad при\ i \neq k \\ \mathrm{A}_{xi} = H_i \times \mathrm{A}^i = \frac{1}{H_i} \times \mathrm{A}^i \end{cases} .$$

С учётом приведённых выше параметров можем получить закон для расчётов параметров div и rot вектора A, моделирующего кинетику смешивания частиц при изготовлении древесных материалов:

$$div\, \mathrm{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial H_2 H_3 \mathrm{A}_{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_3 H_1 \mathrm{A}_{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1 H_2 \mathrm{A}_{x^3}}{\partial x^3}\right),$$

$$(rot\, \mathrm{A})_{x^i} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{\frac{\partial (H_3 \mathrm{A}_{x^2})}{\partial x^2} - \frac{\partial (H_2 \mathrm{A}_{x^2})}{\partial x^3}\right\}.$$

Затем, вводя условие, что вышеприведенные формулы применимы к вектору A=grad f, при этом предположив, что

$$\mathrm{A}_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad \mathrm{A}^i = g^i k \times \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Мы можем получить выражение для оператора Лапласа, применимое для различных криволинейных координат:

$$\nabla f = div\ gradf = \frac{1}{\sqrt{g}} \times \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} \times g^{ik} \times \frac{\partial f}{\partial x^k}\right).$$

А также для решения более частных задач в ортогональных системах координат можно получить следующее выражение:

$$\nabla f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{\frac{\partial y}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \times \frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial y}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \times \frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial y}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \times \frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right\}.$$

Таким образом, при использовании нелинейной модели, а также виртуального перемещения ячеек, можно сделать вывод, что структура матрицы переходных вероятностей не меняется, а все расчёты можно произвести по вышеуказанным формулам. Кроме того, нелинейная модель является более обобщенной и её адекватность даёт возможность использовать более простые в расчётах линейные модели. Адекватность в целом математической модели можно легко проверить экспериментальными исследованиями, а все необходимые расчеты выполняются на ЭВМ. Кроме того, представленная модель позволяет создать фундамент для дальнейшего совершенствования существующих систем интенсификации деревоизготовительных установок, а также позволяет положить начало созданию новых, более совершенных систем.

Использование теории виртуального перемещения ячеек вполне оправдывает себя и при решении уравнений теплопроводности. Достаточно полезным оно будет и при решении уравнений о параллельном переносе вектора, характеризующего кинетику процессов смешивания по определенным параметрам. В данном же случае это поможет определить div и rot данного вектора. А также, что немаловажно, при реализации задачи через идею Леви-Чивита, используя элементы тензорной алгебры, можно найти решение для оператора Лапласа как в криволинейных, так и в более упрощенном варианте – ортогональных системах координат. Как известно, он способен привести к операторам и функциям, крайне полезным при решении конкретных (частных) задач.

Следует также отметить, что предложенная модель исследования кинетики смешивания древесных сыпучих материалов и приведение некоторых приложений в крайне обобщенном виде – лишь одна из фундаментальных постановок, которые при дальнейшем изучении способны привести к решению многих задач процессов смешивания, тепломассопереноса и других процессов, происходящих в агрегатах по смешиванию и сушки древесных отходов. Кроме того, данная постановка задачи способна дать не только фундаментальные уравнения, но и конкретные решения для совершенствования агрегатов и технологий изготовления древесных материалов высокого качества.

Литература

1. Рудобашта, С. Н. Массоперенос в системах с твердой фазой / С. Н. Рудобашта. – Москва : Химия, 1980. – 248 с.
2. Сажин, Б. С. Научные основы теории сушки / Б. С. Сажин, В. Б. Сажин. – Москва : Наука 1997. – 448 с.
3. Макаров, Ю. И. Аппараты для смешения сыпучих материалов / Ю. И. Макаров. – Москва : 1973. – 215 с.
4. Селиванов, Ю. Т. Исследования влияния осевого движения на процесс непрерывного смешивания сыпучего материала во вращающемся барабане / Ю. Т. Селиванов, В. Ф. Першин // Известия высших учебных заведений. Серия: химия и химическая технология. – 2003. – Т. 46, №7. – С.42–45.
5. Зорин, А. В. Введение в общие цепи Маркова : учебно-методическое пособие / А. В. Зорин. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2013. – 51 с.
6. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел : учебное пособие / Э. М. Карташов. – 2-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 1985. – 480 с.
7. Бытев, Д.О. Основы теории и методы расчета оборудования для переработки гетерогенных систем в дисперсно-пленочном состоянии : специальность 05.04.09 : диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Бытев Донат Олегович ; Ярославский государственный технический университет. – Ярославль, 1995. – 545 с.
8. Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. – Москва : Наука 1965. – 420 с.

Yu.R. Osipov, K.S. Lukin

RESEARCH OF WOOD BULK MATERIALS MIXING KINETICS DURING PRODUCTION OF CONSTRUCTION MATERIALS

The mathematical model of a research of mixing processes of wood bulks in drying crushing unitsduring production of construction materials is presented in this article. The kinetics was considered from a position of Markov theory of chains in representation of cell-like model. The equations of heat conductivity and laws of diffusion in the course of mixing are also adapted. For the defining of parameters of mixing processes, the Levi-Civita idea is used; laws for calculation of basic operators who explain fundamental processes and contribute to further improvement of the system of production of construction materials are presented.

Markov chains, drying, crushing, wood bulks, Levi-Civita idea, cell-like representations, virtual movement of cells.