УДК 531.391

И.П. Попов
Курганский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 1

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета механических систем для установившихся режимов. При решении использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей. Представление гармонических величин в виде вращающихся векторов в комплексной плоскости и операции с их комплексными амплитудами позволяют многократно облегчить расчет сколь угодно сложных механических систем при гармонических воздействиях в установившемся режиме. Построены векторные диаграммы амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени.

Реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс.

Классическое решение задач, связанных с расчетом скоростей и реакций элементов сложных механических систем при гармоническом силовом воздействии [1], заключается в составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений [2] и является достаточно громоздким и трудоемким [3]. В большинстве случаев интерес ограничивается установившимся режимом.

Цель исследования состоит в разработке существенно компактных методов расчета систем для установившихся режимов.

При решении использованы методы, применяемые для расчета электрических цепей [4].

Параллельное соединение потребителей механической мощности. Точки приложения сил к потребителям механической мощности [5] (рис. 1) обладают единой скоростью

$$v = V\sin\omega t\,. \tag{1}$$

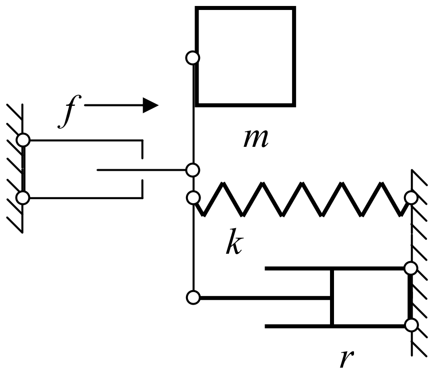

Рис. 1. Параллельное соединение

Силы, приложенные к инертному телу [6], упругому элементу [7] и демпферу, соответственно равны

$$f_m = m\frac{dv}{dt} = m\omega V\cos\omega t\,, \tag{2}$$

$$f_k = -kx = k\int v dt = -\frac{k}{\omega}V\cos\omega t\,, \tag{3}$$

$$f_r = rv = rV\sin\omega t\,. \tag{4}$$

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$f = f_m + f_k + f_r = V\left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\cos\omega t + r\sin\omega t\right] =$$

$$= V\sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}\left[\frac{m\omega - k/\omega}{\sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}}\cos\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{\sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}}\sin\omega t\right]$$

Пусть

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m\omega - k/\omega}{r}\,. \tag{5}$$

Тогда

$$f = V\sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}\left(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t\right) =$$
$$= V\sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}\sin(\omega t + \varphi) = F\sin(\omega t + \varphi)\,. \tag{6}$$

Это известная формула вынужденных колебаний, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение. Амплитуда суммарной силы равна

$$F = Vz\,, \tag{7}$$

$$z = \sqrt{\left(m\omega - k/\omega\right)^2 + r^2}\ \ (кг\cdot c^{-1})\,. \tag{8}$$

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий [8]:

– (скорость) $V \Rightarrow I$ (ток),
– (сила) $F \Rightarrow U$ (напряжение),
– (масса) $m \Rightarrow L$ (индуктивность),
– (коэффициент упругости) $k \Rightarrow 1/C$ (C – емкость),
– (коэффициент вязкого сопротивления) $r \Rightarrow R$ (сопротивление).

В 1919 г. Вебстер ввел в механику заимствованное из электротехники понятие о механических реактансах [9], являющихся аналогами электрических реактивных сопротивлений [10]:

– (*инертный реактанс*) $\omega m \Rightarrow \omega L$ (индуктивное сопротивление),
– (*упругий реактанс*) $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$ (емкостное сопротивление).

В соответствии с представленной системой аналогий выражение (7) дуально закону Ома для участка электрической цепи

$$U = IZ,$$

где $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$ – полное сопротивление. Следовательно, выражение (8) – это *механический импеданс* (impedance) как в силу дуального соответствия, так и потому, что в его состав входят инертный и упругий реактансы. *Механический реактанс* (reactance) равен

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

При $x = 0$ получается известная формула $\omega = \sqrt{k/m}$. Имеет место *резонанс сил*. Если при этом r=0, то и $z = 0$. Физический смысл этого состоит в том, что система не оказывает сопротивления внешнему силовому гармоническому воздействию. Для единообразия терминологии величина r в дальнейшем называется *механическим резистансом* (resistance).

Комплексное представление при параллельном соединении. По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\left[Ae^{i(\omega t+\varphi)} \right],$$

где $Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ – вращающийся в комплексной плоскости вектор.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина $Ae^{i(\omega 0+\varphi)} = Ae^{i\varphi} = \dot{A}$ называется *комплексной амплитудой*.

В соответствии с этим выражение (1) можно представить в виде

$$v = V\sin\omega t = \mathrm{Im}(Ve^{i\omega t}),\ \dot{V} = Ve^{i0}.$$

Формула (2) показывает, что f_m опережает по фазе v на $\pi/2$. Следовательно,

$$\dot{F}_m = m\omega \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_m \dot{V}.$$

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega m \tag{9}$$

– инертный реактанс в комплексном представлении.

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Комплексная амплитуда инертной силы равна

$$\dot{F}_m = \omega m e^{i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично, с учетом (3) и (4), $\dot{F}_k = -\frac{k}{\omega}\dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_k \dot{V}$.

$$\underline{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{k}{\omega} \tag{10}$$

– упругий реактанс.

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = \underline{r}\dot{V}.$$

$\underline{r} = r$ – резистанс.

Комплексные амплитуды упругой и резистивной сил соответственно равны

$$\dot{F}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}},\quad \dot{F}_r = r\dot{V} = re^{i0}Ve^{i0}.$$

Механические реактанс и импеданс соответственно равны

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического импеданса совпадает с (8)

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}.$$

Его фаза равна (5). Таким образом, $\underline{z} = Ze^{i\varphi}$.

Суммарная сила, развиваемая источником силового гармонического воздействия, равна

$$\dot{F} = \underline{z}\dot{V} = ZVe^{i\varphi}, \tag{11}$$

что соответствует (6).

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20\ (кг \cdot c^{-2})$, $r = 7\ (кг \cdot c^{-1})$. Найти скорость и составляющие силы в установившемся режиме.

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i90^\circ} = 20e^{i90^\circ}\ (кг \cdot c^{-1}),$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90^\circ} = 10e^{-i90^\circ}\ (кг \cdot c^{-1}).$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2} = \sqrt{7^2 + (20-10)^2} = 12{,}207\ (кг \cdot c^{-1}).$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{x_m - x_k}{r} = \mathrm{arctg}\frac{20-10}{7} = 55^\circ,$$

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi} = 12{,}207e^{i55^\circ}\ (кг \cdot c^{-1}).$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{12{,}207e^{i55^\circ}} \approx 8{,}192e^{-i55^\circ}\ (м \cdot c^{-1}), \tag{12}$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 8{,}192e^{-i55^\circ} = 163{,}846e^{i35^\circ}\ (Н),$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 8{,}192e^{-i55^\circ} = 81{,}923e^{-i145^\circ}\ (Н),$$

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = 7e^{i0} \cdot 8{,}192e^{-i55^\circ} = 57{,}344e^{-i55^\circ}\ (Н).$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 163{,}846e^{i35^\circ} + 81{,}923e^{-i145^\circ} +$$

$$+ 57{,}344e^{-i55^\circ} = 100e^{i0}\ (Н) = \dot{F}$$

Классический расчет по сравнению с примером 1 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма (не является необходимой частью расчета) для величин из примера 1 представлена на рисунке 2.

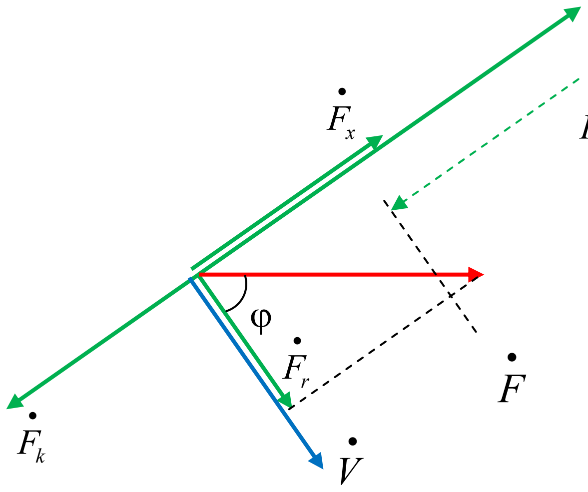

Рис. 2. Векторная диаграмма при параллельном соединении

Резонанс сил. В дополнение к вышесказанному о резонансе сил можно ограничиться численным примером.

Пример 2. Пусть $k=40\,(кг\cdot c^{-2})$. Остальные данные – из примера 1. Потребители механической мощности соединены параллельно.

$$\underline{x}_k=20e^{-i90^\circ}\,(кг\cdot c^{-1}),\ \underline{z}=r=7e^{i0^\circ}\,(кг\cdot c^{-1}),$$

$$\dot V=\frac{\dot F}{\underline{z}}=\frac{100e^{i0}}{7e^{i0^\circ}}\approx 14{,}286e^{i0^\circ}\,(м\cdot с^{-1}),$$

$$\dot F_m=\underline{x}_m\dot V=20e^{i90^\circ}\cdot 14{,}286e^{i0^\circ}=285{,}72e^{i90^\circ}\,(Н),$$

$$\dot F_k=\underline{x}_k\dot V=20e^{-i90^\circ}\cdot 14{,}286e^{i0^\circ}=285{,}72e^{-i90^\circ}\,(Н),$$

$$\dot F_r=r\dot V=7e^{i0}\cdot 14{,}286e^{i0^\circ}=100e^{i0^\circ}\,(Н).$$

Разумеется,

$$\dot F_m+\dot F_k+\dot F_r=285{,}72e^{i90^\circ}+285{,}72e^{-i90^\circ}+$$

$$+100e^{i0^\circ}=100e^{i0}\,(Н)=\dot F=\dot F_r.$$

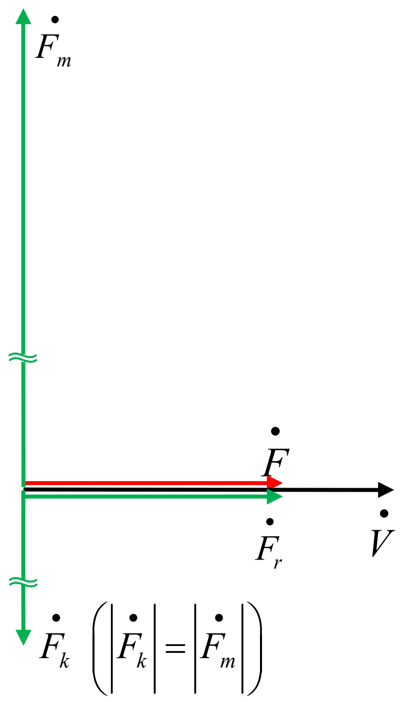

Рис. 3. Векторная диаграмма резонанса сил

Векторная диаграмма для величин из примера 2 представлена на рисунке 3. Реактивные силы $\dot F_m$ и $\dot F_k$ (термин заимствован из электротехники) существенно выше, чем в примере 1.

Последовательное соединение потребителей механической мощности. Ко всем потребителям механической мощности (рис. 4) приложена единая сила

$$f=F\cos\omega t.$$

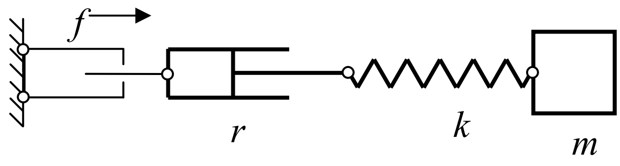

Рис. 4. Последовательное соединение

Скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера соответственно равны

$$v_m=\frac{1}{m}\int f dt=\frac{F}{\omega m}\sin\omega t, \tag{13}$$

$$v_k=-\frac{1}{k}k\frac{dx}{dt}=\frac{1}{k}\frac{df}{dt}=-\frac{\omega F}{k}\sin\omega t, \tag{14}$$

$$v_r=\frac{f}{r}=\frac{F}{r}\cos\omega t. \tag{15}$$

Скорость штока источника силового гармонического воздействия равна

$$v=v_m+v_k+v_r=F\left[\left(\frac{1}{\omega m}-\frac{\omega}{k}\right)\sin\omega t+\frac{1}{r}\cos\omega t\right]=$$

$$=F\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}\left[\frac{1/(\omega m)-\omega/k}{\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}}\sin\omega t+\right.$$

$$\left.+\frac{1/r}{\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}}\cos\omega t\right].$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1/(\omega m)-\omega/k}{1/r}.$$

$$v=F\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}\left(\sin\varphi\sin\omega t+\cos\varphi\cos\omega t\right)=$$

$$=F\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}\cos(\omega t-\varphi)=V\cos(\omega t-\varphi).$$

Это формула вынужденных колебаний при последовательном соединении потребителей механической мощности, для получения которой не потребовалось составлять и решать дифференциальное уравнение.

Амплитуда суммарной скорости равна

$$V=Fy,$$

$$y=\sqrt{\left[1/(\omega m)-\omega/k\right]^2+(1/r)^2}. \tag{16}$$

При $1/(\omega m)-\omega/k=0$ также получается известная формула $\omega=\sqrt{k/m}$. Имеет место *резонанс скоростей*, при котором точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, при этом сами по себе инертное тело и упругий элемент совершают колебания. Если дополнительно $1/r=0$, то и $y=0$. Физический смысл этого состоит в том, что система оказывает бесконечно большое сопротивление внешнему силовому гармоническому воздействию, вследствие чего шток источника силового гармонического воздействия неподвижен, хотя инертное тело и упругий элемент совершают колебания.

Комплексное представление при последовательном соединении. Порядок рассуждений аналогичен представленному выше

$$f=F\cos\omega t=\mathrm{Re}(Fe^{i\omega t}),\ \dot{F}=Fe^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Формула (13) показывает, что v_m отстает по фазе f на $\pi/2$. Следовательно,

$$\dot{V}_m=-\frac{1}{\omega m}\dot{F}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\underline{x}_m}\dot{F}=\underline{b}_m\dot{F}\cdot$$

$$\underline{b}_m=\frac{1}{\omega m}e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\frac{1}{\omega m}=\frac{1}{\underline{x}_m}$$

– *инертный сассептанс* (susceptance) в комплексном представлении.

Комплексная амплитуда инертной скорости равна

$$\dot{V}_m=\frac{1}{\omega m}e^{-i\frac{\pi}{2}}Fe^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\omega m}Fe^{i0}\cdot$$

Аналогично, с учетом (14) и (15),

$$\dot{V}_k=\frac{\omega}{k}\dot{F}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\underline{x}_k}\dot{F}=\underline{b}_k\dot{F}\cdot$$

$$\underline{b}_k=\frac{\omega}{k}e^{i\frac{\pi}{2}}=i\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\underline{x}_k}\ -\textit{упругий сассептанс.}$$

Комплексные амплитуды упругой и резистивной скоростей соответственно равны

$$\dot{V}_k=\frac{\omega}{k}e^{i\frac{\pi}{2}}Fe^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{\omega}{k}Fe^{i\pi}\cdot\ \dot{V}_r=\frac{1}{r}\dot{F}=g\dot{F}=gFe^{i\frac{\pi}{2}}\cdot$$

$$\underline{g}=g=\frac{1}{r}\ -\textit{механический кондактанс}\ \text{(conductance).}$$

Механический сассептанс равен

$$\underline{b}=\underline{b}_k+\underline{b}_m=\left(\frac{\omega}{k}-\frac{1}{\omega m}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot$$

Механический адмитанс (admittance) равен

$$\underline{y}=g+\underline{b}=g+\left(\frac{\omega}{k}-\frac{1}{\omega m}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Модуль механического адмитанса совпадает с (16)

$$Y=\sqrt{g^2+(b_k-b_m)^2}=\sqrt{\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\omega}{k}-\frac{1}{\omega m}\right)^2}\,.$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{b_k-b_m}{g}=\mathrm{arctg}\frac{\omega/k-1/(\omega m)}{g}=\mathrm{arctg}\left[(m\omega-k/\omega)\frac{r}{mk}\right].$$

$$\underline{y}=Ye^{i\varphi}.$$

Суммарная скорость равна скорости штока источника силового гармонического воздействия

$$\dot{V}=\underline{y}\dot{F}=Ye^{i\varphi}Fe^{i\frac{\pi}{2}}=YFe^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}. \qquad (17)$$

Пример 3. Для данных примера 1 найти все скорости в установившемся режиме.

$$\underline{b}_m=\underline{x}_m^{-1}=5\cdot10^{-2}e^{-i90^\circ}\ (кг^{-1}\cdot c),$$

$$\underline{b}_k=\underline{x}_k^{-1}=10\cdot10^{-2}e^{i90^\circ}\ (\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}),$$

$$g=r^{-1}=14{,}286\cdot10^{-2}\ (кг^{-1}\cdot c)\cdot$$

$$Y=\sqrt{g^2+(b_k-b_m)^2}=\sqrt{(14{,}286\cdot10^{-2})^2+}$$

$$\overline{+(10\cdot10^{-2}-5\cdot10^{-2})^2}=15{,}135\cdot10^{-2}\ (кг^{-1}\cdot c).$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\frac{b_k-b_m}{g}=\mathrm{arctg}\frac{10\cdot10^{-2}-5\cdot10^{-2}}{14{,}286\cdot10^{-2}}=19{,}29^\circ,$$

$$\underline{y}=Ye^{i\varphi}=15{,}135\cdot10^{-2}e^{i19{,}29^\circ}\ (\text{кг}^{-1}\cdot\text{с})\cdot$$

$$\dot{V}=\underline{y}\dot{F}=15{,}135\cdot10^{-2}e^{i19{,}29^\circ}\cdot100=15{,}135e^{i19{,}29^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_m=\underline{b}_m\dot{F}=5\cdot10^{-2}e^{-i90^\circ}\cdot100=5e^{-i90^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k=\underline{b}_k\dot{F}=10\cdot10^{-2}e^{i90^\circ}\cdot100=10e^{i90^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_r=g\dot{F}=14{,}286\cdot10^{-2}\cdot100=14{,}286\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}).$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m+\dot{V}_k+\dot{V}_r=5e^{-i90^\circ}+10e^{i90^\circ}+14{,}286=15{,}135e^{i19{,}29^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1})=\dot{V}$$

Классический расчет по сравнению с примером 3 несоизмеримо сложнее и объемнее.

Векторная диаграмма для величин из примера 3 представлена на рисунке 5.

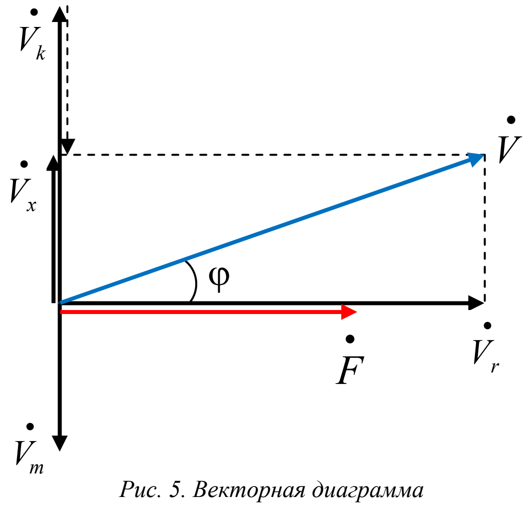

Рис. 5. Векторная диаграмма при последовательном соединении

Резонанс скоростей. В дополнение к вышесказанному о резонансе скоростей можно ограничиться численным примером.

Пример 4. Все данные – из примера 2. Потребители механической мощности соединены последовательно.

$$\underline{b}_k=5\cdot10^{-2}e^{i90^\circ}\ (\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}),$$

$$Y=g=14{,}286\cdot10^{-2}\ (кг^{-1}\cdot c),$$

$$\varphi=0^\circ,$$

$$\underline{y}=Ye^{i\varphi}=14{,}286\cdot10^{-2}e^{i0^\circ}\ (\text{кг}^{-1}\cdot\text{с}),$$

$$\dot{V}=\underline{y}\dot{F}=14{,}286\cdot10^{-2}\cdot100=14{,}286e^{i0^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k=\underline{b}_k\dot{F}=5\cdot10^{-2}e^{i90^\circ}\cdot100=5e^{i90^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}).$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m+\dot{V}_k+\dot{V}_r=5e^{-i90^\circ}+5e^{i90^\circ}+14{,}286=$$

$$=14{,}286e^{i0^\circ}\ (\text{м}\cdot\text{с}^{-1})=\dot{V}=\dot{V}_r$$

Векторная диаграмма для величин из примера 4 представлена на рисунке 6.

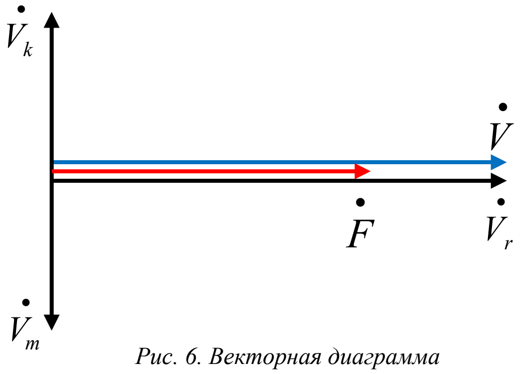

Рис. 6. Векторная диаграмма резонанса скоростей

Применение комплексного представления позволило получить более компактные алгебраические методы расчета сложных механических систем в установившихся режимах по сравнению с классическими методами, основанными на составлении и интегрировании систем дифференциальных уравнений. При этом объем вычислений сокращается в несколько раз. Ключевую роль в предложенном методе играют механические реактанс, резистанс и импеданс для параллельного соединения потребителей механической мощности и сассептанс, кондактанс и адмитанс – для последовательного. Построение векторных диаграмм амплитуд сил, скоростей и их составляющих в комплексной плоскости для нулевого момента времени дает наглядное представление о фазовых соотношениях между этими величинами и их взаимосвязи.

Литература

1. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – 4-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.

2. Попов, И. П. Исследование резонансов в технических системах / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 2(4). – С. 15–18.

3. Анализ нелинейной динамики процесса многорезцового точения «по следу» / Гуськов А. М., Гуськов М. А., Динь Дык Тунг, Пановко Г. Я. // Машиностроение и инженерное образование. – 2018. – № 2 (55). – С. 9–16.

4. Попов, И. П. Электромеханические или искусственные масса и упругость / И. П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Технические науки. – 2016. – Вып. 4. – С. 89–94.

5. Царенко, С. Н. Крутильные колебания стержневых конструкций с осевой неоднородностью геометрических характеристик / С. Н. Царенко. – DOI: 10.14529/mmph190107 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. серия: Математика. Механика. Физика. – 2019. – Том. 11. – № 1. – С. 50–58.

6. Буланчук, П. О. Вибрационная энергия и управление маятниковыми системами / П. О. Балпнчук, А. Г. Петров // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, Вып. 4. – С. 550–562.

7. Регулируемое упругое устройство / Попов В. Е., Парышев Д. Н., Моисеев О. Ю. [и др.] // Естественные и технические науки. – 2018. – № 6 (120). – С. 95–99.

8. Попов, И. П. Комбинированные векторы и магнитный заряд / И. П. Попов. – DOI: 10.25791/pfim.06.2018.329 // Прикладная физика и математика. 2018. – № 6. – С. 12–20.

9. Нейтрализация механического инертного реактанса основной гармоники в двигателях внутреннего сгорания / Попов И. П., Попов Д. П., Кубарева С.Ю., Блынских Е. Ю. // Проблемы и перспективы развития автомобильного транспорта : материалы международной научно-практической конференции. – Курган : КГУ, 2013. – С. 82– 87.

10. Попов, И. П. Четыре теоремы для синхронных машин с реактивной нагрузкой / И. П. Попов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2018. – № 28. – С. 169–178.

I.P. Popov
Kurgan State University

STUDY OF FORCED MECHANICAL SYSTEMS OSCILLATIONS. PART 1

The purpose of the research is to develop essentially compact methods for calculating of mechanical systems for steady-state modes. The solution includes the methods used to calculate electrical circuits. The representation of harmonic quantities in the form of rotating vectors in the complex plane and the operation with their complex amplitudes make it possible to repeatedly simplify the calculation of arbitrarily complex mechanical systems with harmonic effects in the steady state. Vector diagrams of the amplitudes of forces, velocities and their components in the complex plane for the zero time instant are constructed.

Reactance, Resistance, Impedance, Sasseptance, Conductance, Admittance.