УДК 534.014.3

И.П. Попов
Курганский государственный университет

ДИССИПАТИВНАЯ, РЕАКТИВНАЯ И ПОЛНАЯ МОЩНОСТИ ВИБРОПРИВОДОВ МАШИН

Представлено математическое описание механических колебательных процессов под действием внешнего силового гармонического воздействия. Развиваемая при этом механическая мощность помимо диссипативной составляющей содержит реактивную деформационную мощность. Потоки последней являются обратимыми – источник внешнего воздействия и объект, совершающий колебания, обмениваются ею между собой.

Диссипативная, реактивная, полная мощности, вибропривод, гармонические колебания.

Механическая мощность является производной энергии по времени. При работе вибрационных машин [1–3] развивается кинетическая энергия [4–6] за счет движения массивных тел и тепловая – за счет трения. Их производные определяют различные виды механической мощности – переменную реактивную [7] и неотрицательную тепловую.

Дуально-инверсным аналогом реактивной механической мощности является реактивная электрическая мощность. Тепловой механической мощности соответствует электрическая активная мощность [8].

Целью работы является теоретическое описание разновидностей мощности, имеющей место при работе вибрационных машин [9, 10].

Задача заключается в аналитическом представлении энергетического аспекта вибрационных явлений.

Актуальность исследования обусловлена негативным влиянием механической реактивной мощности на качество тока питающей сети (появление гармоники с частотой механических колебаний, трансформация механической реактивной мощности в электрическую реактивную мощность и др.).

Реактивная инерционная и активная тепловая мощности. В удовлетворительном приближении перемещение массивного рабочего органа вибромеханизма можно считать гармоническим

$$x = l\sin\omega t,$$

где x – координата, l – амплитуда, ω – круговая частота. Скорость определяется как производная перемещения

$$v = \dot{x} = l\omega\cos\omega t = V_m\cos\omega t.$$

Здесь

$$V_m = l\omega.$$

– максимальное значение. Из электротехники известно, что действующее значение меньше

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

В соответствии со вторым законом Ньютона сила определяется как

$$f_a = m\ddot{x} = -lm\omega^2\sin\omega t. \tag{2}$$

Сила трения равна

$$f_\mu = \mu\dot{x} = \mu l\omega\cos\omega t, \tag{3}$$

здесь μ – коэффициент трения. Сумма этих сил имеет вид:

$$f = f_a + f_\mu =$$
$$= -lm\omega^2\sin\omega t + \mu l\omega\cos\omega t =$$
$$= l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\cos\omega t - \right.$$
$$\left. - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}\sin\omega t\right).$$

Пусть

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m\omega}{\mu}. \tag{4}$$

При этом формулу для силы можно записать в виде:

$$f = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t\right) =$$
$$= l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi).$$

Максимальное значение

$$F_m = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}.$$

Соответственно, действующее –

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Мощность определяется следующим образом:

$$s = fv = l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\cos(\omega t + \varphi)l\omega\cos\omega t =$$
$$= 0{,}5l^2\omega^2\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right] =$$
$$= FV\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right] = \tag{6}$$
$$= FV\left(\cos\varphi + \cos 2\omega t\cos\varphi - \sin 2\omega t\sin\varphi\right) =$$
$$= FV\cos\varphi\left(1 + \cos 2\omega t\right) - FV\sin\varphi\sin 2\omega t =$$
$$= p + q_i.$$

Механическая диссипативная мощность определяется так же, как активная мощность:

$$P = FV\cos\varphi. \tag{7}$$

φ представляет собой разность фаз колебаний представленных величин.

Механическая реактивная (инерционная) мощность определяется так же, как реактивная мощность:

$$Q_i = FV\sin\varphi. \qquad (8)$$

В электротехнике принято, что P – это среднее значение, а Q – амплитуда. Здесь все обстоит точно также.

Так же, как в электротехнике, определяется полная мощность:

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \qquad (9)$$

Она находится как умножение действующих значений величин.

С учетом (1), (5) и (8)

$$Q_i = FV\sin\varphi = \qquad (10)$$
$$= \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{ml^2\omega^3}{2}.$$

В то же время

$$f_a v = -lm\omega^2\sin\omega t\, l\omega\cos\omega t =$$
$$= -0{,}5l^2 m\omega^3\sin 2\omega t = \qquad (11)$$
$$= -F_a V\sin 2\omega t = -Q_i\sin 2\omega t,$$

см. (6) и (10).

С учетом (1), (5) и (7)

$$P = FV\cos\varphi =$$
$$= \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}. \qquad (12)$$

В то же время,

$$f_\mu v = \mu l\omega\cos\omega t\, l\omega\cos\omega t =$$
$$= 0{,}5\mu l^2\omega^2(1 + \cos 2\omega t) = \qquad (13)$$
$$F_\mu V(1 + \cos 2\omega t) = P(1 + \cos 2\omega t),$$

см. (6) и (12).

С учетом (9), (10) и (12)

$$S = FV = \frac{l\omega\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{l^2\omega^2\sqrt{\mu^2 + m^2\omega^2}}{2}.$$

Реактивная деформационная мощность. Далее рассматриваются силы при линейной упругой деформации. Инертность во внимание не принимается.

Сила определяется как

$$f_k = kx = kl\sin\omega t, \qquad (14)$$

k – жесткость. Сумма сил, принимая во внимание (3), равна

$$f = f_k + f_\mu = kl\sin\omega t + \mu l\omega\cos\omega t =$$
$$= l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}\cos\omega t\right).$$

Пусть

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k}{\mu\omega}.$$

При этом формулу для силы можно записать в виде:

$$f = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left(\sin\varphi\sin\omega t + \cos\varphi\cos\omega t\right) =$$
$$= l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t - \varphi\right).$$

Максимальное значение

$$F_m = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}.$$

Соответственно, действующее –

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}. \qquad (15)$$

Мощность определяется следующим образом:

$$s = fv = l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\cos\left(\omega t - \varphi\right)l\omega\cos\omega t =$$
$$= 0{,}5l^2\omega\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}\left[\cos\varphi + \cos\left(2\omega t - \varphi\right)\right] =$$
$$= FV\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\right] = \qquad (16)$$
$$= FV\left(\cos\varphi + \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t\sin\varphi\right) =$$
$$= FV\cos\varphi\left(1 + \cos 2\omega t\right) + FV\sin\varphi\sin 2\omega t =$$
$$= p + q_d.$$

По аналогии (6), (7) и (12) тепловая мощность равна

$$P = FV\cos\varphi =$$
$$= \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{\mu\omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{\mu l^2\omega^2}{2}.$$

С учетом (15), (1), (8) и (16) реактивная деформационная мощность имеет вид:

$$Q_d = FV\sin\varphi = \qquad (17)$$
$$= \frac{l\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{\sqrt{2}}\frac{l\omega}{\sqrt{2}}\frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}} = \frac{kl^2\omega}{2}.$$

В то же время

$$f_k v = kl\sin\omega t\, l\omega\cos\omega t = 0{,}5kl^2\omega\sin 2\omega t =$$
$$= F_k V\sin 2\omega t = Q_d\sin 2\omega t, \qquad (18)$$

см. (16) и (17).

Полная механическая мощность находится как

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2\omega\sqrt{k^2 + \mu^2\omega^2}}{2}.$$

Реактивная гравитационная мощность. Момент силы при отклонении математического маятника от положения равновесия определяется как

$$m_J = mgL\alpha,$$

здесь L – длина подвеса, α – отклонение (град.). При этом

$$\alpha = \alpha_0\sin\omega t.$$

Производная отклонения

$$\dot\alpha = \alpha_0\omega\cos\omega t = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t.$$

Механическая мощность

$$q_g = m_J\dot\alpha = mgL\alpha_0\sin\omega t\,\alpha_0\sqrt{\frac{g}{L}}\cos\omega t =$$
$$= 0{,}5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}\sin 2\omega t.$$

Реактивная гравитационная мощность равна

$$Q_g = 0{,}5m\alpha_0^2\sqrt{Lg^3}.$$

Комплексное представление. Гармоническую величину можно представлять в виде комплексной амплитуды вектора в комплексной плоскости для нулевого момента времени.

Комплексная скорость при инертной нагрузке равна

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

Имеется в виду, что

$$v = V_m \cos\omega t = \mathrm{Im}\dot{V}_m.$$

При переходе к действующим величинам

$$\dot{V} = Ve^{j\pi/2}, \; \dot{F} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}.$$

Так же, как в электротехнике, для определения полной мощности необходимо умножить силу не на саму скорость, а на *сопряженный* ей вектор

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2+\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2+\varphi-\pi/2)} =$$
$$= FVe^{j\varphi} = FV\cos\varphi + jFV\sin\varphi = P + jQ_i.$$

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями гармонической функции, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Реактивная деформационная мощность имеет обратный знак

$$\underline{S} = \dot{F}\overset{*}{V} = Fe^{j(\pi/2-\varphi)}Ve^{-j\pi/2} = FVe^{j(\pi/2-\varphi-\pi/2)} =$$
$$FVe^{-j\varphi} = FV\cos\varphi - jFV\sin\varphi = P + jQ_d.$$

Нетрудно убедиться, что

$$P = \mathrm{Re}\dot{F}\overset{*}{V}, \; Q = \mathrm{Im}\dot{F}\overset{*}{V}.$$

Представление с использованием трехмерных векторов. Гармонические скорости и силы допускают векторное представление, при котором они являются проекциями на выбранную ось в плоскости виртуального вращения.

Подобно комплексному представлению гармонические величины можно отождествить с проекциями вращающихся векторов (в рассматриваемом случае **F** и **V**) на ортогональные оси в *фазовой* плоскости вращения. Формулы мощностей приобретают компактный вид

$$P = (\mathbf{F}, \mathbf{V}), \; \mathbf{Q} = [\mathbf{F}, \mathbf{V}], \; S^2 = (\mathbf{F}, \mathbf{V})^2 + [\mathbf{F}, \mathbf{V}]^2.$$

Материальным воплощением виртуальных вращающихся векторов в вибрационных процессах являются кривошипы вращательно-линейных преобразователей.

Установлено, что в вибрационных машинах и механизмах помимо традиционной тепловой мощности развиваются реактивные мощности, в первую очередь инерционная, которая является производной кинетической энергии массивных деталей и узлов.

Литература

1. Попов, И. П. Самобалансировка вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2018. – № 2 (2). – С. 16–19.
2. Балансировка вибромашин при строительстве железнодорожного пути / И. П. Попов, Д. Н. Парышев, В. М. Самуйлов, К. А. Васильев // Вестник УрГУПС. – 2018. – № 2(38). – С. 15–19.
3. Попов, И. П. Самосбалансированные вибрационные машины / И. П. Попов, Д. Н. Парышев, А. В. Ильтяков // Вестник УрГУПС. – 2018. – № 4 (40). – С. 4–10.
4. Попов, И. П. О мерах механического движения / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3 (26). – С. 13–15.
5. Попов, И. П. Роторно-линейный движитель / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 1 (3). – С. 23–26.
6. Попов, И. П. Выбор систем отсчета в задачах управления движущимися инертными объектами / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2019. – № 1 (3). – С. 20–22.
7. Попов, И. П. Механические аналоги реактивной мощности / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3 (30). – С. 37–39.
8. Попов, И. П. Емкостно-инертное устройство / И. П. Попов // Известия Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». – 2015. – Т. 2. – С. 43–45.
9. Попов, И. П. Механическая мощность при колебательных технологических операциях / И. П. Попов // Вестник *Псковского* государственного университета. Технические науки. – 2015. – Вып. 2. – С. 15–18.
10. Попов, И. П. Самобалансировка виброприводов машин для просеивания муки и сахара / И. П. Попов, С. Ю. Кубарева // Ползуновский вестник. – 2018. – № 4. – С. 68–72.

I.P. Popov

DISSIPATIVE, REACTIVE AND FULL CAPACITY OF MACHINE VIBRIC DRIVES

A mathematical description of mechanical oscillatory processes under the action of an external force harmonic effect is presented. The mechanical power developed at the same time, in addition to the dissipative component, contains reactive deformation power. The streams of the latter are reversible – the source of external influence and the object making oscillations exchange it among themselves.

Dissipative, reactive, full power, vibration drive, harmonic oscillations.