



## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье представлено решение задачи оценки резонанса сил в технических системах. На основании общеизвестных математических зависимостей представлена математическая модель резонанса сил и скоростей. Приведены примеры расчета и даны рекомендации по использованию модели в методиках расчета.

Резонанс сил, скоростей, параллельное соединение, последовательное, источник силы, скорости.

Учет механических резонансных явлений в технических системах является актуальной задачей [1]. При этом резонанс может быть как вредным [2], так и полезным. Исходя из этого, разработчики машин и механизмов стремятся, соответственно, либо не допустить его развитие [3], либо наоборот – создать для него необходимые условия [4]. Крайне негативным проявлением резонанса является разрушение механических конструкций и вывод машин из строя. Полезное действие резонанса заключается в существенном увеличении амплитуды перемещений рабочих органов механизмов и возрастании их силового воздействия [5].

В основе описания резонанса лежит широко известное дифференциальное уравнение

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = a_\omega \sin \omega t, \quad (1)$$

которое имеет решение  $x = x_1 + x_2$ , где

$$x_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2)$$

– собственные затухающие колебания,

$$x_2 = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

– вынужденные колебания,  $a$ ,  $\alpha$  – постоянные интегрирования,

$$b = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad h = \frac{b}{\omega_0}, \quad \delta_0 = \frac{a_\omega}{a_0}. \quad (5)$$

При подстановках

$$a_2 = m, \quad a_1 = r, \quad a_0 = k, \quad a_\omega = F \quad (6)$$

уравнение (1) превращается в классическое дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний [6]

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t \quad \text{или} \quad m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = F \sin \omega t. \quad (7)$$

При

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

имеет место резонанс.

Теоретическая электротехника, объекты и процессы которой математически изоморфны механическим [7], различает два резонанса – резонанс напряжений и резонанс токов.

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий, в соответствии с которой напряжение дуально силе, а ток – скорости. В этой связи возникает закономерный вопрос: резонанс применительно к уравнению (7) это резонанс сил или скоростей? Ответы на этот и связанные с ним вопросы составляют предмет настоящего исследования.

Резонанс сил – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны.

Резонанс скоростей – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны.

Резонанс сил. Уравнению (7) соответствует схема параллельного соединения (рис. 1), при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы.

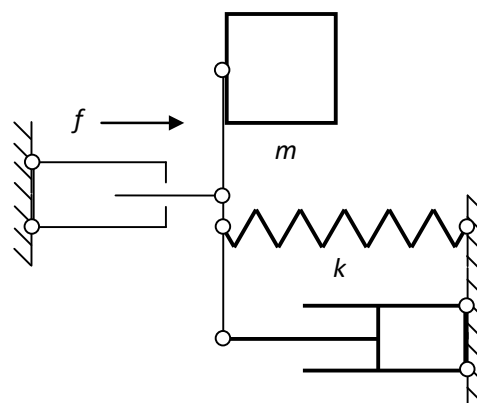


Рис. 1. Параллельное соединение

При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (7), возникает резонанс сил. Действительно, в соответствии с (4)–(6)

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + 4 \frac{r^2 m}{4m^2 k} \frac{m\omega^2}{k}}} = \frac{F}{k} \frac{1}{\omega/k \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} =$$

$$= \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}}.$$

В установившемся режиме

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$f_k = kx = \frac{kF}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

$$f_m = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m\omega^2 F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

При выполнении условия (8)

$$f_k^* = \frac{kF}{\sqrt{k/m} \sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{k/m} \sqrt{mk} F}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{kF}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (12)$$

$$f_m^* = -\frac{m\sqrt{k/m} F}{\sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (13)$$

$$= -\frac{\omega \sqrt{mk} F}{\sqrt{k/mr}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\omega m F}{r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (14)$$

Выражения (11) и (13) показывают, что  $f_k^*$  и  $f_m^*$  равны и противоположны. (9) и (12), (10) и (14) показывают, что  $f_k^*$  и  $f_m^*$  максимальны. Следовательно, имеет место резонанс сил.

В связи с этим в первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавить следующее дуально-инверсное соответствие: последовательное соединение потребителей электрической мощности при резонансе напряжений дуально параллельному соединению потребителей механической мощности при резонансе сил.

При резонансе сил реактивная сила системы «упругий элемент – инертное тело» равна нулю, поскольку  $f_k^* = -f_m^*$ .

Величину  $\sqrt{mk}$  по аналогии с электротехникой можно назвать *волновым сопротивлением* (системы).

Если  $\sqrt{mk} > r$ , то реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

*Пример 1.*  $F = 100 \text{ Н}$ ,  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ ,  $m = 10 \text{ кг}$ ,  $k = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2}$ ,  $r = 5 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$ . Найти  $f_k^*$  и  $f_m^*$ .

В соответствии с (12) и (14)

$$f_k^* = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 5} \sin(\omega t - \varphi) = 400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)},$$

$$f_m^* = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{5} \sin(\omega t - \varphi) = -400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)}.$$

Реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Последовательное соединение. Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно (рис. 2).

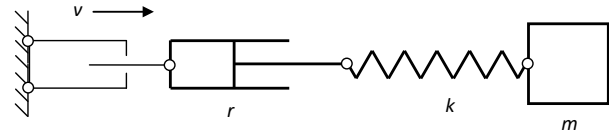


Рис. 2. Последовательное соединение

При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются. При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости.

Скорости компонентов системы равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt, \quad v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}, \quad v_r = \frac{f}{r}, \quad v = -V \cos \omega t$$

$$v_m + v_k + v_r = v,$$

$$\frac{1}{k} \frac{df}{dt} + \frac{f}{r} + \frac{1}{m} \int f dt = -V \cos \omega t \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dt} + \frac{1}{m} f = V \omega \sin \omega t. \quad (15)$$

Последнее уравнение изоморфно (1). Собственные затухающие колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (2) определяются выражением

$$f_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) = ae^{-\frac{k}{2r} t} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2}{4r^2}} t + \alpha \right).$$

Вынужденные колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (3) определяются выражениями

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} = \frac{V\omega m}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + 4 \frac{k^2}{4r^2} \frac{m}{k} \frac{m}{k}}} = \frac{V\omega m}{\omega m \sqrt{\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}},$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} = 2 \frac{k}{2r} \frac{\omega m}{k} \frac{1}{1 - \omega^2 m/k} = \frac{\omega m}{r \omega m (1/\omega m - \omega/k)},$$

$$f_2 = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin \left[ \omega t - \arctg \frac{1}{r(1/\omega m - \omega/k)} \right].$$

Резонанс скоростей. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (15), возникает резонанс скоростей.

Действительно, в установившемся режиме

$$f = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt = -\frac{1}{\omega m} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (16)$$

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

При выполнении условия (8)

$$v_m^* = -\frac{1}{\sqrt{k/m}} \frac{V}{\sqrt{\left[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m/k}\right]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (18)$$

$$= -\frac{\sqrt{k/m} Vr}{\omega \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (19)$$

$$v_k^* = \frac{\sqrt{k/m}}{k} \frac{V}{\sqrt{\left[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m/k}\right]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (20)$$

$$= \frac{\omega Vr}{\sqrt{k/m} \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega Vr}{k} \cos(\omega t - \varphi). \quad (21)$$

Выражения (18) и (20) показывают, что  $V_k^*$  и  $V_m^*$  равны и противоположны. (16) и (19), (17) и (21) показывают, что  $V_k^*$  и  $V_m^*$  максимальны. Следовательно, имеет место резонанс скоростей.

В связи с этим в первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавить следующее дуально-инверсное соответствие: параллельное соединение потребителей электрической мощности при резонансе токов дуально последовательному соединению потребителей механической мощности при резонансе скоростей.

При резонансе скоростей точка приложения силы к системе «упругий элемент – инертное тело» неподвижна, поскольку

$$v_k^* = -v_m^*. \quad (22)$$

Если  $\sqrt{mk} < r$ , то скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

*Пример 2.*  $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $r = 80 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$ , остальные данные из примера 1. Найти  $v_k^*$  и  $v_m^*$ .

В соответствии с (19) и (21)

$$v_m^* = -\frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10} \cos(\omega t - \varphi) = -40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$v_k^* = \frac{2 \cdot 10 \cdot 80}{40} \cos(\omega t - \varphi) = 40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

Скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

**Артефакты.** Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания [8].

В [9] описана механическая система из двух инертных тел и двух упругих элементов, для которой обнаружено «удивительное явление», при котором

точка приложения гармонической силы остается неподвижной. Это явление, казалось бы, очевидным образом названо антирезонансом. Степень неудачности этого термина можно оценить, применив его к резонансу токов в электротехнике.

В действительности упомянутая система представляет собой суперпозицию «элементарных» систем, рассмотренных выше. По этой причине процессы, происходящие в ней, являются суперпозицией соответствующих процессов, одним из которых и был резонанс скоростей, ошибочно принятый за «антирезонанс». При этом неподвижность точки приложения гармонической силы («удивительное явление») соответствует следствию (22).

**Заключение.** Описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей.

Существование двух механических резонансов естественным образом соответствует аналогиям между электрическими и механическими явлениями и объектами. Механическому резонансу сил соответствует резонанс напряжений в электротехнике, а резонансу скоростей – резонанс токов. Подобно тому, как оба электрических резонанса примерно в равной мере встречаются в электротехнике, отдать приоритет какому-либо из двух механических резонансов также затруднительно.

При резонансе сил реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать приложенную силу. В то же время реактивные силы нейтрализуют друг друга, что может быть использовано в вибротехнике, в частности, в решетных сортировальных машинах для обеспечения равномерной нагрузки на привод [10].

При резонансе скоростей скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать скорость штока источника воздействия. При этом точка приложения силы к системе «упругий элемент – инертное тело» неподвижна, что используется для разработки гасителей колебаний.

Предлагаемые модели могут быть полезными для теоретических исследованиях колебательных процессов, а также при разработке методик оценки резонанса в технических системах.

#### Литература

1. Energy efficiency assessment of sieve separation gear kinematic diagram / I. P. Popov, V. G. Chumakov, S. S. Rodionov, L. Ja. Chumakova, S. I. Rodionova // British journal of innovation in science and technology. – 2017. – Vol. 2, № 3. – P. 5–11.
2. Попов, И. П. Самобалансировка вибрационных механизмов / И. П. Попов // Вестник Вологодского государственного университета. – 2018. – № 2 (2). – С. 16–19.
3. Пат. 2601891 RU, МПК6 F 16 F 15/24. Устройство для уравнивания инерционных сил / И. П. Попов, В. Г. Чумаков, М. В. Давыдова, Д. П. Попов, С. Ю. Кубарева (Россия). – № 2015100567/11; заявл. 12.01.2015; опубл. 10.11.2016, бюл. № 31.

4. Popov, I. P. Synthesis inert-inertial oscillator / I. P. Popov // Applied mathematics and control sciences. – 2017. – № 1. – P. 7–13.
5. Попов, И. П. Искусственные масса и упругость / И. П. Попов // Вестник Тверского государственного технического университета. – 2016. – № 1 (29). – С. 7–11.
6. Попов, И. П. Спонтанные упруго-емкостные колебания в системах автоматики / И. П. Попов // Вестник Морского государственного университета им. адмирала Г. И. Невельского. Серия: Автоматическое управление, математическое моделирование и информационные технологии. – 2017. – Вып. 78. – С. 93–96.
7. Попов, И. П. Комплексная мощность механических колебательных процессов / И. П. Попов // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2016. – № 1. – С. 32–36.
8. Popov, I. P. Modeling tree-inert oscillator / I. P. Popov // Applied mathematics and control sciences. – 2018. – № 4. – P. 73–79.
9. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – Москва: Наука, 1987. – 352 с.
10. Попов, И. П. Моделирование биинертного осциллятора / И. П. Попов // Приложение математики в экономических и технических исследованиях: сб. науч. тр. / под общ. ред. В. С. Мхитаряна. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2017. – С. 188–192.

*I.P. Popov*  
*Kurgan State University*

### **RESEARCH OF RESONANCES IN TECHNICAL SYSTEMS**

The article presents a solution to the problem of estimating the resonance of forces in technical systems. On the basis of well-known mathematical relationships, a mathematical model of the resonance of forces and velocities is presented. Examples of calculation are given and recommendations are given on the use of the model in calculation methods.

Resonance of forces, velocities, parallel connection, series, source of force, speed.