УДК 517.9



Э. Мухамадиев, А.Б. Назимов, А.Н. Наимов
Вологодский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В статье исследована разрешимость одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в евклидовом пространстве конечномерных вещественных векторов. Исследование данного класса уравнений затруднено тем, что главная линейная часть уравнения не обратима, поэтому известные теоремы не применимы. В настоящей работе для исследования разрешимости рассматриваемого класса уравнений применен новый метод, в котором сочетаются метод Понтрягина из теории автономных систем на плоскости и методы вычисления вращения векторных полей. Сформулирована и доказана теорема об условиях разрешимости исследуемого класса нелинейных уравнений. В качестве приложения доказана новая теорема о разрешимости периодической задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нелинейное уравнение с малым параметром, метод Понтрягина, вращение векторного поля, периодическая задача, математический анализ, обработка информации.

1. Введение

Статья посвящена исследованию разрешимости нелинейных уравнений следующего вида:

$$Ax=\mu f\left(x,\mu\right), \qquad x\in R^n. \tag{1}$$

Здесь R^n – евклидово пространство n-мерных вещественных векторов со скалярным произведением

$$<x,y>=x_1y_1+\ldots+x_ny_n, \qquad x,y\in R^n.$$

μ – вещественный параметр, $A:R^n\to R^n$ – линейный оператор, $g:R^{n+1}\to R^n$ – непрерывное отображение.

Если оператор A обратим, то уравнение (1) сводится к уравнению

$$x=\mu A^{-1}f\left(x,\mu\right), \qquad x\in R^n, \tag{2}$$

и, применяя теорему Брауэра о неподвижной точке [1], можно доказать, что при малых значениях параметра μ уравнение (2) разрешимо.

В настоящей статье исследуется разрешимость уравнения (1) в случае, когда оператор A не обратим. В этом случае применяется новый метод, исходящий от метода Понтрягина, известного в теории автономных систем на плоскости [2; 3, с. 203]. Метод Понтрягина применяется для доказательства существования предельного цикла возмущенной автономной системы с малым параметром на плоскости. Основная идея метода Понтрягина заключается в том, что при использовании нелинейного возмущения выделяется определенное решение невозмущенной автономной системы и посредством этого решения доказывается существование решения возмущенной автономной системы. Данная идея в настоящей работе реализована применительно к нелинейным уравнениям вида (1). К тому же, в отличие от метода Понтрягина, не предполагается дифференцируемость нелинейного отображения f и применяется теория вращения векторных полей [4, с. 135-157]. Сформулирована и доказана теорема о разрешимости уравнения (1) при малых значениях параметра μ. В качестве приложения исследована периодическая задача

$$\begin{gathered} y'=Cy+\mu g\left(t,y,\mu\right), \quad t\in\left(0,\omega\right), \\ y\in R^n, \quad y\left(0\right)=y\left(\omega\right) \end{gathered} \tag{3}$$

в резонансном случае, т.е. в случае, когда матрица C имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i2\pi/\omega$. Полученные результаты являются новыми и в последующем могут быть использованы при исследовании краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

2. Основные результаты

Для формулировки основных результатов введем ряд обозначений. Обозначим через A^* оператор, сопряженный к оператору A. Пусть $N\left(A\right)$, $N\left(A^*\right)$ – ядра операторов A и A^*, а $R\left(A\right)$, $R\left(A^*\right)$ – их области значений, $R\left(A\right)^\perp$, $R\left(A^*\right)^\perp$ – ортогональные дополнения к $R\left(A\right)$, $R\left(A^*\right)$.

Общеизвестны следующие равенства [1]:

$$R\left(A\right)^\perp=N\left(A^*\right), \quad R\left(A\right)\oplus N\left(A^*\right)=R^n,$$

$$R\left(A^*\right)^\perp=N\left(A\right),$$

$$R\left(A^*\right)\oplus N\left(A\right)=R^n, \quad \dim R\left(A\right)=\dim R\left(A^*\right),$$

$$\dim N\left(A\right)=\dim N\left(A^*\right).$$

Из последнего равенства следует существование линейного обратимого оператора $B:N\left(A^*\right)\to N\left(A\right)$. А также заметим, что обратим оператор $\tilde{A}:R\left(A^*\right)\to R\left(A\right)$ – сужение оператора A на подпространстве $R\left(A^*\right)$. Далее, обозначим через P и Q ортогональные проекторы $P:R^n\to N\left(A\right)$, $Q:R^n\to N\left(A^*\right)$.

Лемма 1. *Если μ отлично от нуля и x – решение уравнения* (1), *то из разложения $x = u + v$, где $u \in N(A)$ и $v \in R(A^*)$, следует, что пара (u,v) является решением системы уравнений*

$$BQf(u+v,\mu)=0,\ v=\mu\tilde{A}^{-1}(I-Q)f(u+v,\mu),\quad u\in N(A),\ v\in R(A^*). \tag{4}$$

И обратно, если пара (u,v) – решение системы уравнений (4), *то $x = u + v$ является решением уравнения* (1).

Согласно лемме 1, уравнение (1) при ненулевом μ равносильно системе уравнений (4). Исследуем разрешимость системы уравнений (4) предполагая выполненными следующие два условия:

1) существуют $u_0 \in N(A)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $BQf(u_0,0)=0$ и $BQf(u,0)\neq 0$ при $0<|u-u_0|\le\varepsilon$;

2) вращение векторного поля $BQf(\cdot,0):N(A)\to N(A)$ на сфере $S^1_\varepsilon(u_0)=\{u\in N(A):|u-u_0|=\varepsilon\}$ отлично от нуля: $\gamma\left(BQf(\cdot,0),S^1_\varepsilon(u_0)\right)\neq 0$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N(A)\neq\{0\}$ и выполнены условия* 1), 2). *Тогда существует $\mu_0>0$ такое, что при всех $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$ система уравнений* (4) *разрешима.*

Используя теорему 1, исследуем разрешимость периодической задачи (3) в резонансном случае. Пусть выполнены условия:

3) матрица C постоянна и имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i2\pi/\omega$;

4) отображение $g:R^{n+2}\to R^n$ непрерывно и ω – периодично по t;

5) существует вектор $x_0\in R^n$, обладающий свойствами:

а) вектор x_0 принадлежит подпространству

$$E=\left\{x\in R^n:\left(e^{-\omega C}-I\right)x=0\right\};$$

б) для любого вектора x из некоторой окрестности

$$U_r(x_0)=\left\{x\in R^n:|x-x_0|<r\right\}$$

существует единственное решение $p(t,x,\mu)$, $t\in[0,\omega]$ задачи Коши

$$y'=Cy+\mu g(t,y,\mu),\quad y(0)=x;$$

в) вектор x_0 является изолированным нулем векторного поля

$$G(x)\equiv BQ\int_0^\omega e^{-\tau C}g\left(\tau,e^{\tau C}x,0\right)d\tau,$$

действующего в E, где $Q:R^n\to R\left(e^{-\omega C}-I\right)^\perp$ – ортогональный проектор, $B:R\left(e^{-\omega C}-I\right)^\perp\to E$ – линейный обратимый оператор;

г) отлично от нуля вращение $\gamma\left(G,S^1_\varepsilon(x_0)\right)$ векторного поля G на сфере

$$S^1_\delta(x_0)=\left\{x\in E:|x-x_0|=\delta\right\}$$

положительного радиуса $\delta<r$.

Справедлива следующая теорема о разрешимости периодической задачи (3).

Теорема 2. *Если выполнены условия* 3) – 5), *то периодическая задача* (3) *разрешима при всех $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$, где μ_0 – фиксированное положительное число.*

3. Доказательство теоремы 1

Сначала проверим справедливость леммы 1. Пусть $\mu\neq 0$ и x – решение уравнения (1). Вектор x представим в виде суммы $x=u+v$, где $u\in N(A)$ и $v\in R(A^*)$, и к обеим частям уравнения (1) поочередно применим проекторов Q и $I-Q$. Тогда получим два равенства:

$$\mu Qf(u+v,\mu)=0,\qquad \tilde{A}v=\mu(I-Q)f(u+v,\mu)\cdot$$

Если в первом равенстве применить оператор B и сократить на μ, а во втором равенстве обратить оператор $\tilde{A}$, то в результате получаем систему уравнений (4). Обратно, если пара (u,v) – решение системы уравнений (4), то первое уравнение системы (4) перемножим на μ и применим оператор B^{-1}, а во втором равенстве применим оператор $\tilde{A}$. Из полученных равенств следует, что $x=u+v$ есть решение уравнения (1). Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $N(A)\neq\{0\}$ и выполнены условия 1), 2). Разрешимость системы уравнений (4) равносильна существованию нуля векторного поля

$$\Psi_1(u,v,\mu)\equiv\begin{pmatrix}BQf(u+v,\mu)\\ v-\mu\tilde{A}^{-1}(I-Q)f(u+v,\mu)\end{pmatrix}$$

в пространстве $N(A)\times R(A^*)$. Покажем, что существует $\mu_0>0$ такое, что при любом $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$ векторное поле $\Psi_1(u,v,\mu)$ на сфере

$$S_\varepsilon(u_0,0)=\left\{(u,v)\in N(A)\times R(A^*):|u-u_0|^2+|v|^2=\varepsilon^2\right\}$$

гомотопно векторному полю

$$\Psi_0(u,v)\equiv\begin{pmatrix}BQf(u,0)\\ v\end{pmatrix}.$$

Для этого рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(u,v,\mu)\equiv\begin{pmatrix}BQf(u+\lambda v,\lambda\mu)\\ v-\lambda\mu\tilde{A}^{-1}(I-Q)f(u+v,\mu)\end{pmatrix},\qquad \lambda\in[0,1],$$

и проверим, что $\Psi_\lambda(u,v,\mu)\neq 0$ при всех $(u,v)\in S_\varepsilon(u_0,0)$, $\lambda\in[0,1]$, $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$, где μ_0 – некоторое положительное число. Действительно, в противном случае существуют последовательности $(u_m,v_m)\in S_\varepsilon(u_0,0)$, $\lambda_m\in[0,1]$, μ_m, $m=1,2,\ldots$ такие, что $\mu_m\to 0$ при $m\to\infty$ и

$$\begin{aligned}&BQf(u_m+\lambda_m v_m,\lambda_m\mu_m)=0,\\ &v_m=\lambda_m\mu_m\tilde{A}^{-1}(I-Q)f(u_m+v_m,\mu_m),\end{aligned}\qquad m=1,2,\ldots\ .$$

Из второго равенства следует, что $v_m \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда, в первом равенстве переходя к пределу при $m \to \infty$, получим $BQf\left(u_0^*, 0\right) = 0$, где $u_0^* \in N\left(A\right)$ и $\left|u_0^* - u_0\right| = \varepsilon$. А это противоречит условию 1).

Из гомотопности векторных полей $\Psi_1\left(\cdot,\cdot,\mu\right)$ и $\Psi_0\left(\cdot,\cdot\right)$ на сфере $S_\varepsilon\left(u_0, 0\right)$ вытекает, что их вращения на этой сфере определены и равны [4, с. 16]:

$$\gamma\left(\Psi_1\left(\cdot,\cdot,\mu\right), S_\varepsilon\left(u_0,0\right)\right) = \gamma\left(\Psi_0\left(\cdot,\cdot\right), S_\varepsilon\left(u_0,0\right)\right)$$
при $\mu \in \left(-\mu_0, \mu_0\right)$.

Вращение $\gamma\left(\Psi_0\left(\cdot,\cdot\right), S_\varepsilon\left(u_0,0\right)\right)$, согласно теореме 22.4, приведенной в книге [4, с. 160], равно вращению $\gamma\left(BQf\left(\cdot,0\right), S_\varepsilon\left(u_0,0\right)\right)$ векторного поля $BQf\left(\cdot,0\right)$ на сфере $S_\varepsilon\left(u_0,0\right) = \left\{u \in N\left(A\right) : \left|u - u_0\right| = \varepsilon\right\}$. Следовательно, учитывая условие 2), имеем $\gamma\left(\Psi_1\left(\cdot,\cdot,\mu\right), S_\varepsilon\left(u_0,0\right)\right) \neq 0$ при $\mu \in \left(-\mu_0, \mu_0\right)$. Отсюда, применяя принцип ненулевого вращения [4, с. 138], получаем, что при $\mu \in \left(-\mu_0, \mu_0\right)$ внутри сферы $S_\varepsilon\left(u_0, 0\right)$ существует хотя бы один ноль векторного поля $\Psi_1\left(\cdot,\cdot,\mu\right)$, т.е. система уравнений (4) разрешима. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим уравнение

$$\left(e^{-\omega C} - I\right)x = \mu\int_0^\omega e^{-\tau C} g\left(\tau, p\left(\tau, x, \mu\right), \mu\right)d\tau, \qquad x \in U_r\left(x_0\right). \quad (5)$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2. *Если* x *– решение уравнения* (5), *то вектор-функция* $y\left(t\right) = p\left(t, x, \mu\right)$ *является решением периодической задачи* (3).

Доказательство. Вектор-функция $y\left(t\right) = p\left(t, x, \mu\right)$ является единственным решением системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = Cy + \mu g\left(t, p\left(t, x, \mu\right), \mu\right),$$

удовлетворяющее начальному условию $y\left(0\right) = x$. Отсюда находим $y\left(t\right)$:

$$y\left(t\right) = e^{tC}\left(x + \mu\int_0^\omega e^{-\tau C} g\left(\tau, p\left(\tau, x, \mu\right), \mu\right)d\tau\right).$$

Проверим ω-периодичность $y\left(t\right)$, воспользуясь тем, что x – решение уравнения (5):

$$y\left(\omega\right) = e^{\omega C}\left(x + \mu\int_0^\omega e^{-\tau C} g\left(\tau, p\left(\tau, x, \mu\right), \mu\right)d\tau\right) =$$

$$= x + e^{\omega C}\left(-\left(e^{-\omega C} - I\right)x + \mu\int_0^\omega e^{-\tau C} g\left(\tau, p\left(\tau, x, \mu\right), \mu\right)d\tau\right) = y\left(0\right).$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, согласно лемме 2, разрешимость периодической задачи (3) сводится к разрешимости уравнения (5). Покажем разрешимость уравнения (5), применяя теорему 1.

Положим

$$A = e^{-\omega C} - I, \qquad f\left(x, \mu\right) = \int_0^\omega e^{-\tau C} g\left(\tau, p\left(\tau, x, \mu\right), \mu\right)d\tau.$$

Из условия 3) следует, что $N\left(A\right) = E \neq \left\{0\right\}$. А из условий 5в) и 5г) следует, что вектор $x_0 \in N\left(A\right)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Отсюда, в силу теоремы 1, вытекает, что уравнение (5) разрешимо. Теорема 2 доказана.

В качестве примера рассмотрим следующую систему трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} z' = i\dfrac{2\pi}{\omega}z + \mu\left(e^{i6\pi t/\omega}\overline{z}^2 + \varphi\left(t, z, y_3\right)\right), \\ y_3' = ay_3 + \psi\left(t, z, y_3\right), \end{cases}$$

где i – мнимая единица, $z = y_1 + iy_2$, $\overline{z} = y_1 - iy_2$, $a \neq 0$, $\varphi\left(t, z, 0\right) \equiv 0$, $\psi\left(t, 0, 0\right) \not\equiv 0$. Функции $\varphi\left(t, z, y_3\right)$ и $\psi\left(t, z, y_3\right)$ предполагаем заданными и непрерывными по совокупности переменных, ω-периодичными по t и удовлетворяющими условию Липшица по переменными z, y_3 в некоторой окрестности точки $x_0 = \left(0, 0, 0\right)$. Проверим выполнимость условий теоремы 2.

Непосредственно можно проверить, что

$$E = \left\{\left(x_1, x_2, 0\right)^{\mathrm{T}} : x_1, x_2 \in \left(-\infty, +\infty\right)\right\},$$

$$R\left(e^{-\omega C} - I\right) = \left\{\left(0, 0, x_3\right)^{\mathrm{T}} : x_3 \in \left(-\infty, +\infty\right)\right\},$$

$$R\left(e^{-\omega C} - I\right)^{\perp} = E, \qquad B = I, \qquad Qx = \left(x_1, x_2, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим $w = x_1 + ix_2$. Тогда имеем:

$$e^{tC}\left(x_1, x_2, x_3\right)^{\mathrm{T}} = \left(e^{-i2\pi t/\omega}w, e^{at}x_3\right)$$

$$G\left(w\right) = \int_0^\omega e^{i2\pi\tau/\omega}\left[e^{i6\pi\tau/\omega}\overline{\left(e^{-i2\pi\tau/\omega}w\right)}^2\right]d\tau = \omega\overline{w}^2, \qquad w \in E,$$

$$\gamma\left(G, S_\varepsilon^1\left(0\right)\right) = -2 \text{ [5, с. 95].}$$

Все условия теоремы 2 выполнены. Согласно теореме 2, при малых значениях параметра μ существует ω-периодическое решение системы уравнений (6).

Литература

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ: учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2002. – 488 с.

2. Понтрягин, Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым / Л. С. Понтрягин // ЖЭТФ. – 1934. – Т. 4, № 8. – С. 234–238.

3. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – 2-е изд., доп. – Москва: Наука, 1990. – 486 с.

4. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – Москва: Наука, 1975. – 511 с.

5. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. – Москва: Наука, 1963. – 248 с.

E. Mukhamadiev, A.B. Nazimov, A.N. Naimov
Vologda State University

ON SOLVABILITY OF NONLINEAR EQUATIONS CLASS WITH A SMALL PARAMETER

The solvability of one class of nonlinear equations with a small parameter in Euclidean space of finite-dimensional real vectors is analyzed. The research of this class of equations is complicated by the fact that the main linear part of the equation is not invertible, so the known theorems are not applicable. In the present work a new method, where the Pontryagin's method from the theory of Autonomous systems on plane and methods for calculating the rotation of vector fields are combined, is applied to study the solvability of the considered class of equations. The theorem about the solvability of a class of nonlinear equations under study is formed and proved. As an application A new theorem on the solvability of the periodic problem for systems of nonlinear ordinary differential equations is additionally proved.

Nonlinear equation with a small parameter, Pontryagin's method, rotation of a vector field, periodic problem, mathematical analysis, information processing.