УДК 517. 51



Э. Мухамадиев
Вологодский государственный университет
С. Байзаев
Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
М.А. Очилова
Худжандский государственный университет

ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО НЕСИММЕТРИЧЕСКИМ ЧАСТИЧНЫМ СУММАМ

Вводятся понятия несимметрических частичных сумм ряда Фурье и равномерной сходимости этого ряда. Доказывается полнота пространства равномерно сходящихся рядов Фурье непрерывных функций по несимметрическим частичным суммам.

Ряды Фурье, несимметрические частичные суммы, равномерная сходимость, полнота пространства, пространство гёльдеровых функций, математический анализ, обработка информации.

В ряде случаев при исследованиях амплитудных и гармонических колебаний в информационных системах требуется математичесоке описание равномерно сходящихся рядов, для чего используются ряды Фурье.

Ряды Фурье [1, 2] и их срезки [3, 4] используются в решении многих задач математики и смежных наук, в частности в исследовании сингулярного интегрального уравнения типа Гильберта.

Ряд Фурье 2π-периодической функции $f(t)$ обозначим:

$$(Sf)(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt}, \tag{1}$$

где коэффициенты $c_k(f)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ определяются равенством

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Частичные суммы ряда (1) определяются как [1, с. 17]

$$\left(S_{-n,n}f\right)(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}. \tag{2}$$

Наряду с (2) рассмотрим несимметрические частичные суммы

$$\left(S_{-m,n}f\right)(t)=\sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikt} \qquad (m,n>0).$$

Будем говорить, что ряд (1) **сходится равномерно** к функции $f(t)$ по несимметрическим частичным суммам на отрезке $[0, 2\pi]$, если

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}\left\|f-S_{-m,n}f\right\|_C=0, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|_C$ – норма в $C[0, 2\pi]$. В дальнейшем под термином «сходится равномерно» будем понимать сходимость по несимметрическим частичным суммам.

Критерий Коши о равномерной сходимости позволяет сформулировать равномерную сходимость ряда Фурье, где участвуют лишь коэффициенты Фурье функции $f(t)$: ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m,\,n\to+\infty}\max_{0\le t\le 2\pi}\left|\sum_{k=-m-q}^{-m-1} c_k(f)e^{ikt}+\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f)e^{ikt}\right|=0$$

равномерно относительно $p\ge 1$, $q\ge 1$.

Каждый из односторонних рядов

$$\left(S_{1,+\infty}f\right)(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{n}_k(f)e^{ikt},$$

$$\left(S_{-\infty,-1}f\right)(t)=\sum_{k=-\infty}^{-1}\tilde{n}_k(f)e^{ikt} \tag{4}$$

называется **срезкой** ряда Фурье (1) функции $f(t)$.

Равномерная сходимость последовательности частичных сумм $\left(S_{-m,n}f\right)(t)$ тесно связана с равномерной сходимостью срезок $\left(S_{1,+\infty}f\right)(t)$ и $\left(S_{-\infty,-1}f\right)(t)$. А именно, справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье* (1) *непрерывной* 2π-*периодической функции* $f(t)$ *сходится равномерно по* $t\in[0, 2\pi]$. *Тогда существуют функции* $f^{(+)}\in C[0, 2\pi]$ и $f^{(-)}\in C[0, 2\pi]$, *являющиеся равномерными пределами рядов* (4) *соответственно:*

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{0\le t\le 2\pi}\left|f^{(+)}(t)-\sum_{k=1}^{n}c_k(f)e^{ikt}\right|=0, \tag{5}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\max_{0\le t\le 2\pi}\left|f^{(-)}(t)-\sum_{k=-m}^{-1}c_k(f)e^{ikt}\right|=0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть ряд (1) равномерно сходится. Покажем равномерную сходимость первой из срезок (4). Это означает существование непрерывной функции $f^{(+)}(t)$, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $n\ge N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left\|f^{(+)}-S_{1,n}f\right\|_C\le\varepsilon$. Согласно критерию Коши достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N(\varepsilon)>0$, что имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f) e^{ikt} \right\|_C \le \varepsilon, \tag{7}$$

где $n \ge N(\varepsilon)$ и $p = 1, 2, \ldots$ – произвольные числа.

Так как ряд (1) равномерно сходится, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти $M_1(\varepsilon) > 0$ и $N_1(\varepsilon) > 0$ такие, что для любых номеров $m \ge M_1(\varepsilon)$ и $n \ge N_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left\| f - S_{-m,n} f \right\|_C \le \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, в частности, получаем $\left\| f - S_{-m,n+p} f \right\|_C \le \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $p = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f) e^{ikt} \right| = \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f) e^{ikt} - \sum_{k=-m}^{n} c_k(f) e^{ikt} \right| =$$

$$= \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f) e^{ikt} - f - \sum_{k=-m}^{n} c_k(f) e^{ikt} + f \right| \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \sum_{k=-m}^{n+p} c_k(f) e^{ikt} - f \right| + \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \sum_{k=-m}^{n} c_k(f) e^{ikt} - f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Соотношение (7) доказано. Из равномерной сходимости первой из срезок (4) вытекает непрерывность ее предела. Обозначив этот предел $f^{(+)}(t)$, будем иметь включение $f^{(+)} \in C[0, 2\pi]$ и справедливость (5).

Аналогичным образом доказывается существование непрерывной функции $f^{(-)}(t)$ и справедливость соотношения (6).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что обратное утверждение к теореме 1 является очевидным: если срезки $\left(S_{1,+\infty} f\right)(t)$ и $\left(S_{-\infty,-1} f\right)(t)$ являются равномерно сходящимися рядами, то частичные суммы $\left(S_{-m,n} f\right)(t)$ ряда Фурье самой функции также являются равномерно сходящимися.

Из определения равномерной сходимости по несимметрическим частичным суммам и теоремы 1 нетрудно заметить справедливость утверждения: *для равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(t)$ необходимо и достаточно компактности семейства функций $\left(S_{-m,n} f\right)(t)$, $m \ge 0$, $n \ge 0$.*

В пространстве $C[0, 2\pi]$ выделяем множество всех 2π-периодических функций $f(t)$, ряд Фурье которых сходятся к этой функции равномерно по $t \in [0, 2\pi]$. Обозначим это множество $FC[0, 2\pi]$.

Теорема 2. *Множество $FC[0, 2\pi]$ является полным нормированным пространством с нормой*

$$\| f \|_{FC} = \sup_{m,\, n > 0} \left\| S_{-m,\, n} f \right\|_C. \tag{8}$$

Доказательство. Линейность. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ являются непрерывными 2π-периодическими функциями с равномерно сходящимися на отрезке $[0, 2\pi]$ рядами Фурье. Тогда ряд Фурье функции $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ сходится к этой функции равномерно по $t \in [0, 2\pi]$ для любых постоянных α и β. Линейность $FC[0, 2\pi]$ доказана.

Выполнение аксиом нормы для функционала (8) проверяется непосредственно.

Покажем, что норма, определенная равенством (8), является более сильной по сравнению с нормой пространства $C[0, 2\pi]$, точнее для любой функции $f \in FC[0, 2\pi]$ имеет место неравенство

$$\| f \|_C \le \| f \|_{FC}. \tag{9}$$

Действительно, пусть $f \in FC[0, 2\pi]$ – произвольная функция. Так как ряд Фурье (1) функции $f(t)$ сходится к этой функции равномерно по $t \in [0, 2\pi]$, то для его остатка

$$f(t) - \left(S_{-m,n} f\right)(t) = \sum_{k=-\infty}^{-m-1} c_k(f) e^{ikt} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}$$

справедливо соотношение (3).

Для произвольных $m, n > 0$ имеет место неравенство

$$\left| \left(S_{-m,n}\right) f(t) \right| \ge \left| f(t) \right| - \left| f(t) - \left(S_{-m,n} f\right)(t) \right|. \tag{10}$$

Переходя в неравенстве (10) к максимумам по $t \in [0, 2\pi]$, получим

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \left(S_{-m,n}\right) f(t) \right| \ge \max_{0 \le t \le 2\pi} \left(\left| f(t) \right| - \left| f(t) - \left(S_{-m,n}\right)(t) \right| \right) \ge$$

$$\ge \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| f(t) \right| - \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| f(t) - \left(S_{-m,n}\right)(t) \right|. \tag{11}$$

Так как

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} \left| f(t) \right| = \| f \|_C, \tag{12}$$

$$\max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \left(S_{-m,n}\right) f(t) \right| \le \sup_{m,n>0} \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| \left(S_{-m,n}\right) f(t) \right| = \| f \|_{FC}, \tag{13}$$

то из (11) в силу (12) и (13), получим

$$\| f \|_{FC} \ge \| f \|_C - \max_{0 \le t \le 2\pi} \left| f(t) - \left(S_{-m,n}\right)(t) \right|. \tag{14}$$

Неравенство (14) верно для всех положительных m и n. Переходя в (14) к пределу при $m \to \infty$ и $n \to \infty$, получаем справедливость неравенства (9).

Докажем, что любая фундаментальная последовательность $\{f_l\}$ из $FC[0, 2\pi]$ имеет предел в этом множестве.

Фундаментальность последовательности $\{f_l\}$ в $FC[0, 2\pi]$ означает выполнение равенства

$$\lim_{l\to\infty}\left\|f_{l+p}-f_l\right\|_{FC}=0 \tag{15}$$

равномерно по $p\geq 1$. Отсюда и из неравенства (9) – подчиненности норм – вытекает равенство $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|f_{l+p}-f_l\right\|_C=0$. Это равенство показывает фундаментальность последовательности $\{f_l\}$ в $C[0,\,2\pi]$. Из полноты пространства $C[0,\,2\pi]$ вытекает существование функции $f_0\in C[0,\,2\pi]$ такой, что

$$\lim_{l\to\infty}\left\|f_0-f_l\right\|_C=0. \tag{16}$$

Покажем, что функция $f_0(t)$ принадлежит и пространству $FC[0,\,2\pi]$, то есть

$$\lim_{m,n\to+\infty}\left\|S_{-m,n}f_0-f_0\right\|_C=0 \tag{17}$$

равномерно по $q\geq 1,\ p\geq 1$.

Из равенства (15) – фундаментальности последовательности $\{f_l\}$ в $FC[0,\,2\pi]$ – следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $l_0(\varepsilon)>0$ такой, что равномерно по $p\geq 1$ выполняется неравенство

$$\left\|f_{l+p}-f_l\right\|_{FC}\equiv\sup_{m,n>0}\left\|S_{-m,n}f_{l+p}-S_{-m,n}f_l\right\|_C<\varepsilon \tag{18}$$

для всех $l\geq l_0(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\left\|f_{l+p}-f_l\right\|_C<\varepsilon,\qquad \left\|S_{-m,n}f_{l+p}-S_{-m,n}f_l\right\|_C<\varepsilon$$

для всех $m\geq 1,\ n\geq 1,\ l\geq l_0(\varepsilon)$ и $p\geq 1$. Отсюда, в силу (16) и непрерывной зависимости коэффициентов Фурье $c_k(f)$ функции f в пространстве $C[0,2\pi]$, переходя к пределу при $p\to\infty$, получим

$$\left\|f_0-f_l\right\|_C\leq\varepsilon, \tag{19}$$

$$\left\|S_{-m,n}f_0-S_{-m,n}f_l\right\|_C\leq\varepsilon \tag{20}$$

для всех $m\geq 1,\ n\geq 1,\ l\geq l_0(\varepsilon)$.

Так как

$$\left\|f_0-S_{-m,n}f_0\right\|_C\leq\left\|f_0-f_l\right\|_C+$$

$$+\left\|f_l-S_{-m,n}f_l\right\|_C+\left\|S_{-m,n}f_l-S_{-m,n}f_0\right\|_C,$$

то в силу (19) и (20) имеем

$$\left\|f_0-S_{-m,n}f_0\right\|_C\leq 2\varepsilon+\left\|f_l-S_{-m,n}f_l\right\|_C \tag{21}$$

для всех $m\geq 1,\ n\geq 1,\ l\geq l_0(\varepsilon)$. В неравенстве (21) при фиксированном $l\geq l_0(\varepsilon)$, переходя к пределу при $m\to\infty,\ n\to\infty$, получим оценку

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|f_0-S_{-m,n}f_0\right\|_C\leq 2\varepsilon. \tag{22}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ из оценки (22) следует справедливость равенства (17). Таким образом, $f_0\in FC[0,\,2\pi]$.

Из неравенства (20) следует, что

$$\left\|f_0-f_l\right\|_{FC}\leq\varepsilon \tag{23}$$

для всех $l\geq l_0(\varepsilon)$. Таким образом, нами доказано равенство

$$\lim_{l\to\infty}\left\|f_l-f_0\right\|_{FC}=0. \tag{24}$$

Теорема 2 доказана.

Существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках. Классическим примером таких функций является пример Дюбуа-Реймонда [5, с. 497–502]. Отсюда следует, что пространство непрерывных функций $C[0,2\pi]$ шире пространства функций с равномерно сходящимися рядами Фурье $FC[0,2\pi]$. Однако, пространство $FC[0,2\pi]$ шире любого пространства Гёльдера $H^\gamma[0,\,2\pi]$ $(0<\gamma<1)$ – непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$, удовлетворяющих так называемому условию Гёльдера с показателем γ:

$$\left|f(t+h)-f(t)\right|\leq H(f)|h|^\gamma$$

для всех $t\in[0,\,2\pi]$, $t+h\in[0,\,2\pi]$, а $H(f)>0$ – постоянная Гёльдера, не зависящая от h. Таким образом, справедливы включения

$$H^\gamma[0,\,2\pi]\subset FC[0,\,2\pi]\subset C[0,\,2\pi],$$

причем все подмножества являются собственными.

Доказательством этого факта является следующий равномерно сходящийся ряд Фурье, сумма которого не принадлежит пространству $H^\gamma[0,\,2\pi]$ ни при одном значении γ: $0<\gamma<1$:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin b_nt,$$

где $a_n=\dfrac{1}{2^n},\qquad n=1,\,2,\,\ldots;$

$b_1=2;\qquad b_{n+1}=2^{b_n},\qquad n=1,\,2,\,\ldots$.

Обозначим $h_m=\dfrac{\pi}{2b_m}$, $m=1,2,\ldots$.

Тогда $b_mh_m=\dfrac{\pi}{2}$, $m=1,2,\ldots$.

При $t=0$, $h=h_m$, $m=1,\,2,\,\ldots$ имеем

$$\left.\frac{f(t+h)-f(t)}{h^\gamma}\right|_{\substack{t=0\\h=h_m}}=$$

$$=\frac{1}{h_m^\gamma}\left[\sum_{n=1}^{m-1}a_n\sin b_nh_m+a_m\sin b_mh_m+\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n\sin b_nh_m\right]. \tag{25}$$

1) Покажем, что

$$\sin b_nh_m=0\quad\text{при}\quad n\geq m+1,\ m\geq 2. \tag{26}$$

Имеем $b_n h_m = 2^{b_{n-1}} \cdot \dfrac{\pi}{2b_m} = 2^{b_{n-1}-b_{m-1}-1}\pi$. Если $m \ge 2$, то $b_{n-1} - b_{m-1} - 1$ является целым числом. Тогда $2^{b_{n-1}-b_{m-1}-1}\pi$ – кратно π и, следовательно, имеет место равенство (26). Отсюда получаем, что $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \sin b_n h_m = 0$ для всех $m \ge 2$.

2) Для среднего слагаемого (25), получаем

$$\frac{1}{h_m^{\gamma}} a_m \sin b_m h_m = \left(\frac{\pi}{2b_m}\right)^{-\gamma} \frac{1}{2^m} \sin\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\gamma} 2^{\gamma b_{m-1}-m}. \quad (27)$$

Так как для любого $\gamma:\ 0<\gamma<1$ справедливо соотношение $\gamma b_{m-1} - m \to +\infty$ при $m \to \infty$, то из (27) будем иметь $\dfrac{1}{h_m^{\gamma}} a_m \sin b_m h_m \to +\infty$ при $m \to \infty$.

3) Рассмотрим первое слагаемое в правой части (25). При $1 \le n \le m-1$ имеем $0 < b_n h_m < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $\sin b_n h_m < b_n h_m$ при $1 \le n \le m-1$, и, следовательно, $\dfrac{1}{h_m^{\gamma}} \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sin b_n h_m < \dfrac{1}{h_m^{\gamma}} \sum_{n=1}^{m-1} a_n b_n h_m = h_m^{1-\gamma} \sum_{n=1}^{m-1} a_n b_n$.

Докажем, что если $m \ge 5$, то имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{m-1} a_n b_n < a_{m-2} b_{m-1}. \quad (28)$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $m=5$ имеем: $\left.\sum_{n=1}^{m-1} a_n b_n\right|_{m=5} = 4 + 2^{12}$, $\left. a_{m-2} b_{m-1}\right|_{m=5} = 2^{13}$. Отсюда, $4 + 2^{12} < 2^{13}$.

Пусть неравенство (28) имеет место при $m = k > 5$:

$$\sum_{n=1}^{k-1} a_n b_n < a_{k-2} b_{k-1}. \quad (29)$$

Покажем справедливость (28) при $m = k+1$: $\sum_{n=1}^{k} a_n b_n < a_{k-1} b_k$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = 2^x - 4x$. Она является возрастающей на промежутке $(2 + \log_2 \log_2 e,\ +\infty)$. Так как $\varphi(4) = 0$, то $\varphi(x) > 0$ для всех $x > 4 > 2 + \log_2 \log_2 e$. Таким образом, нами доказано неравенство

$$2^x > 4x \qquad (x > 4). \quad (30)$$

Используя (29) и (30), получим

$$\sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n b_n + a_k b_k < a_{k-2} b_{k-1} + a_k b_k = \frac{1}{2^{k-2}} b_{k-1} + \frac{1}{2^k} 2^{b_{k-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\left(2^2 b_{k-1} + 2^{b_{k-1}}\right) < \frac{1}{2^k}\left(2^{b_{k-1}} + 2^{b_{k-1}}\right) = \frac{1}{2^{k-1}} 2^{b_{k-1}} = a_{k-1} b_k.$$

Неравенство (28) доказано. При $m \ge 5$ из (28) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m-1} a_n b_n < a_{m-2} b_{m-1} = \frac{1}{2^{m-2}} \cdot 2^{b_{m-2}} = 2^{b_{m-2}-m+2}.$$

Поэтому $\dfrac{1}{h_m^{\gamma}} \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sin b_n h_m < 4\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{1-\gamma} \cdot 2^{(\gamma-1)b_{m-1}+b_{m-2}-m}$.

Так как $\gamma - 1 < 0$, то

$$(\gamma-1) b_{m-1} + b_{m-2} - m \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

и, следовательно, $4\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{1-\gamma} \cdot 2^{(\gamma-1)b_{m-1}+b_{m-2}-m} \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому,

$$\frac{1}{h_m^{\gamma}} \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sin b_n h_m \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, нами доказано соотношение

$$\left.\left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h^{\gamma}}\right|\right|_{t=0,\, h=h_m} \to \infty \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

которое означает, что функция $f(t)$ не принадлежит пространству Гёльдера H^{γ} ни для одного значения $\gamma:\ 0<\gamma<1$.

Аналогичным свойством обладает и непрерывная 2π-периодическая функция $\varphi(t)$, которая на отрезке $[0, \pi]$ определяется следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \varphi_k(t), & t \in (\alpha_k, \beta_k], \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \alpha_k^{\sigma} (t - \alpha_k)^{\alpha_k/2}, & t \in (\alpha_k, \xi_k], \\ \alpha_k^{\sigma} (\beta_k - t)^{\alpha_k/2}, & t \in (\alpha_k, \xi_k], \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2^k}, \qquad \beta_k = 2\alpha_k, \qquad \xi_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$\sigma: 1 < \sigma < 2$ – произвольное число. На отрезке $[-\pi, 0]$ продолжается по четности:

$$\varphi(t) = \varphi(-t), \qquad t \in [-\pi, 0].$$

Можно показать, что: 1) построенная функция $\varphi(t)$ $t \in [-\pi, \pi]$ равномерно по $t \in [-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию Дини, что гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье этой функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, и не принадлежит пространству Гёльдера $H^{\gamma}[-\pi, \pi]$ ни при одном значении $\gamma: 0 < \gamma < 1$.

Таким образом, предложенное математическое описание и его доказательство позволяет использовать пространство равномерно сходящихся рядов Фурье в математическом анализе гармонических колебаний при обработке массивов информации.

Литература

1. Кахан, Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан. – Москва: Мир, 1976. – 206 с.

2. Эдвардс, Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. Т. 1 / Р. Эдвардс. – Москва: Мир, 1985. – 264 с.

3. Назимов, А. Б. Метод регуляризации сдвигом: теория и приложения: монография / А. Б. Назимов, Э. М. Мухамадиев, В. А. Морозов, М. Муллоджанов. – Вологда: ВоГТУ, 2012. – 368 с.

4. Назимов, А. Б. Сингулярные интегральные уравнения Гильберта нейтрального типа: теория и алгоритмы: монография / А. Б. Назимов, М. Муллоджанов, Н. О. Менухова. – Вологда: ВоГУ, 2014. – 244 с.

5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1969. – 658 с.

E. Mukhamadiev
Vologda State University
S. Baizaev
Tajik State University of Law, Business and Politics
M.A. Ochilova
Khujand State University

COMPLETENESS OF THE SPACE OF UNIFORMLY CONVERGENT FOURIER SERIES ON NON-SYMMETRIC PARTIAL SUMS

The term of non-symmetric partial sums of the Fourier series and uniform convergence of this series are introduced. The completeness of the space of uniformly convergent Fourier series of continuous functions on non-symmetric partial sums is proved.

Fourier series, non-symmetric partial sums, uniform convergence, completeness of space, space of Holder, mathematical analysis, information processing.